Grunnur skammtafræðinnar

Bylgjuföll eru stök í Hilbertrúmi

Óendanlegavítt fallarúm á bili [a, b] þ.a.

$$\int_b^a |\Phi|^2 dx = 1$$

gildi um stökin í rúminu

Skilgreinum innfeldi

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)$$

$$\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^*$$

Mengi falla $\{f_n\}$ er fullkominn stöðlanlegur grunnur ef

$$\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{m,n}$$

og sérhvert fall í Hilbertrúminu má liða í grunninum

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

$$\boxed{\text{Mælistærðir eru táknaðar með hermískum virkjum}}$$

Línulegur virki uppfyllir

$$\hat{Q}\left[a f(x) + b g(x)\right]$$

$$= a\hat{Q} f(x) + b\hat{Q} g(x)$$

Væntigildi virkja er

$$\langle Q\rangle = \int dx\, \Psi^* \hat{Q}\, \Psi$$

$$= \langle \Psi | \hat{Q}\Psi\rangle$$

væntigildið er rauntala

$$\langle Q\rangle = \langle Q\rangle^*$$

en * breytir „röðum"

$$\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle \quad \text{f. öll } f$$

slíkir virkjar eru sjálfoka eða Hermískir

Athugum

$$\langle f|\hat{p}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(-i\hbar\partial_x g)$$

$$= -i\hbar f^* g\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{-i\hbar\partial_x f\right\}^* g$$

$$= \langle \hat{p}f|g\rangle$$

f í jaðarpunktunum verður að hverfa svo f sé staðlanlegt.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Skorðuð ástönd (ástönd sem a geta ávalt sömu mælinðurstöðu eru eigin ástönd mælistærðar}\\ \text{eða virkja}\end{array}}$$

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi$$

fast skorðuð $\rightarrow \sigma_Q = 0$

Safn allra eigingilda virkja er róf hans

Komi sama eigingildið fyrir oftar en einusinni er það margfalt, tvöfalt, þrefalt, ...

0 getur verið eigingildi, en ekki eiginvigur

Eigingildi H

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

eru orkuróf Hamiltonvirkjans H

Dæmi

Virkinn $\hat{Q} = i d_\phi$ með ϕ, hornið, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ í Hilbertrúmi falla með

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \quad (*)$$

(lotubundin föll)

Er $\hat{Q}$ Hermískur?

$$\langle f | \hat{Q} g \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \; f^* \{ i d_\phi g \}$$

$$= i f^* g \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} d\phi \; i \{ d_\phi f^* \} g$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \; \{ i d_\phi f \}^* g = \langle \hat{Q} f | g \rangle$$

Virkinn $\hat{Q}$ er hermískur

Hvert er róf hans?

$$i d_\phi f = q f$$

hefur lausn $f(\phi) = A e^{iq\phi}$ sem þarf að uppfylla $(*)$

$$A e^{iq(\phi + 2\pi)} = A e^{iq\phi}$$

$\rightarrow e^{iq2\pi} = 1$

$\rightarrow q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Öll eigingildin eru einföld

Eigingildi og ástönd hermitískra virkja

Flokkum í tvo hópa strjál og samfeld

Strjál róf

* Eigingildin eru rauntölur

$$\hat{Q} f = q f$$

$\hat{Q}$ er hermitískur $\rightarrow \langle f | \hat{Q} f \rangle = \langle \hat{Q} f | f \rangle$

$$\rightarrow \quad q \langle f | f \rangle = q^* \langle f | f \rangle$$

$$q = q^*$$

$\rightarrow$ q er rauntala

f eru staðlanleg föll í Hilbertrúmi

* Eigin ástönd með mismunandi eigingildi eru hornrétt

$$\hat{Q} f = q f \quad \text{og} \quad \hat{Q} g = q' g$$

$\hat{Q}$ er hermitískur virki $\rightarrow$

$$\langle f | \hat{Q} g \rangle = \langle \hat{Q} f | g \rangle$$

$$\rightarrow \quad q' \langle f | g \rangle = q^* \langle f | g \rangle$$

$$\rightarrow \quad q' = q$$

, en q' og q voru mismunandi, eina útleiðin er því að

$$\langle f | g \rangle = 0$$

Hér er ekkert sagt um eiginvigra margfaldra eigingilda

En við getum alltaf valið eigin ástönd sama margfalda eigingildisins þ.a. þau séu hornrétt

því hvaða samantekt eiginvigra margfalds eigingildis sem er er aftur eiginvigur

(Rökvandi)

Hér verður munur á eiginleikum n-víðra fallarúma og ∞-víðra.
Því er bætt við

Við takmörkum mögulega virkja enn frekar þ.a. við nýtum aðeins þá sem hafa eigin-ástönd sem spanna allt Hilbert rúmið

↓

$\boxed{\text{Eigin föll mælistærðar mynda fullkominn grunn}}$

Samfellt róf

Virkjar með samfellt róf hafa eiginföll sem eru ekki staðlanleg

Við getum útvíkkað hugtakið staðlanleg föll

Dæmi

Skoðum eigingildi og vigra skriðþunga virkjans

$$-i\hbar \partial_x f_p(x) = p f_p(x)$$

Almenna lausnir er

$$f_p(x) = A\exp\left\{i\frac{p}{\hbar}x\right\}$$

Ekki er til gildi á $p \in \mathbb{C}$ þ.a. f_p sé staðlanlegt og sé stak í Hilbertrúmi

Lagförum þetta með útvíkkun

$$\langle f_{p'}|f_p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_{p'}^*(x) f_p(x)$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}}$$

$$= |A|^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\hbar}\, e^{i(p-p')\frac{x}{\hbar}}$$

$$= |A|^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{i(p-p')u}$$

$$= |A^2|\, 2\pi\hbar\, \delta(p-p')$$

því við höfðum áður skilgreint Dirac delta fallið sem

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}$$

Ef við nú setjum

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad , \quad f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip}{\hbar}x}$$

þá má umrita

$$\boxed{\langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ef } p \neq p' \\ \infty & \text{ef } p = p' \end{cases}$$

mjög svipað

$$\langle \Phi_n | \Phi_m \rangle = \delta_{n,m}$$

Eiginföllin f_p eru hornrétt

og Fourier greining sýnir að $\{f_p\}$ er fullkominn grunnur

Dirac stöðlun

"Öll staðlaug föll má liða

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C(p)\, f_p(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C(p)\, e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

og

$$\langle f_{p'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C(p) \langle f_{p'} | f_p \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C(p)\, \delta(p-p')$$

$$= C(p')$$

Eiginföll virkja með samfeld róf eigingilda eru Dirac staðlaug og mynda fullkominn grunn

Eiginföll staðsetningar virkjans $\hat{x}$ eru δ-föll

$$\hat{x}\, g_y(x) = y\, g_y(x)$$

$$g_y(x) = \delta(x-y)$$

$$\langle g_{y'} | g_y \rangle = \delta(y-y')$$

Mæling

Mæling á mælistærð $\hat{Q}$ fyrir eind í ástandi lýst með Ψ getur eitthvert eigingildi $\hat{Q}$ q_n með líkindum

$$|c_n|^2 \,, \quad c_n = \langle f_n | \Psi \rangle$$

eða

$$|c(z)|^2 dz \,, \quad c(z) = \langle f_z , \Psi \rangle$$

á bilinu dz

Eftir mælinguna er eindin í eiginástandinu sem mældist

f_n eða f_z

Hér víkur skammtafræðin lengst frá sígildri eðlisfræði

Þetta má réttlæta með því að

almennt gildir

$$\Psi = \sum_n c_n f_n$$

c_n segir til um hversu mikið af f_n er í Ψ

$$c_n = \langle f_n | \Psi \rangle$$

Heildar líkindin eru varðveitt

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

eins má sýna

$$\langle Q \rangle = \sum_n q_n |c_n|^2$$

---

skoðum dæmi

Eiginfall $\hat{x}$ er $\delta(x-y) = g_y(x)$

líkindi þess að finna eind í y

$$c(y) = \langle g_y | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-y) \Psi(x,t)$$

$$= \Psi(y,t) \quad , \quad |c(y)|^2 = |\Psi(y,t)|^2$$

líkindi ~~þess~~ að eind
hafi skriðþunga p

$$C(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\, \Psi(x,t)\, dx$$

$$\equiv \Phi(p,t)$$

Fourier mynd $\Psi(x,t)$

líkindin eru $|\Phi(p,t)|^2 dp$

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\, \Psi(x,t)$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{p}{\hbar}x}\, \Phi(p,t)$$

Kerfum má jafnt lýsa í þessum tveimur fallarúmum, þau eru jöfn