Hreintóna sveifill

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

leysum tímaóháðu jöfnu Schrödingers

$$H\psi = E\psi$$

eða

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m} d_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right\}\psi = E\psi$$

Sem afleiðujöfnu

skölum jöfnuna með náttúrulegu lengd hreintóna sveifils

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

þ.a. $y = \left(\frac{x}{a}\right)$

þá verður jafnan

$$\boxed{d_y^2\psi = (y^2 - \kappa)\psi}$$

ef $\kappa = \frac{2E}{\hbar\omega}$

Orkan sköluð í náttúrulega orkuskala hreintóna sveifils þetta er eigingildisjafna

→ aðeins til stæðanlegar lausnir fyrir viss gildi á K

<u>skoðum aðfellulausn</u>

þegar $y \to \infty$

er jafnan

$$d_y^2 \psi \simeq y^2 \psi$$

með <u>nálgunarlausnir</u>

$$\psi(y) \simeq A e^{-\frac{y^2}{2}} + B e^{+\frac{y^2}{2}}$$

$B = 0$ til ~~þess~~ að lausnin verði normanleg

þá er líklegt að lausnin sé á forminu

$$\psi(y) = h(y) e^{-y^2/2}$$

með

$$d_y \psi = \{ d_y h - y h \} e^{-y^2/2}$$

$$d_y^2 \psi = \{ d_y^2 h - 2y d_y h + (y^2 - 1) h \} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

því verð Schrödingerjafnan

$$\boxed{d_y^2 h - 2y d_y h + (K-1) h = 0} \qquad (*)$$

Reynum röðalausn (til að byrja með)

$$h(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$$

$$d_y h(y) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j y^{j-1} = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \cdots$$

$$d_y^2 h(y) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2) a_{j+2} y^j = 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 y + 3\cdot 4 a_4 y^2 + \cdots$$

Í $(*)$ verður þetta

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (j+1)(j+2) a_{j+2} - 2j a_j + (K-1) a_j \right\} y^j = 0}$$

stuðlarnir við hvert veldi á y verða að hverfa

$$\rightarrow \quad (j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0$$

eða ítrunarsambandið

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1-K)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

Ef a_0 er gefið $\longrightarrow \quad a_2, a_4, \cdots a_{2n}$

a_1 – " – $\longrightarrow \quad a_3, a_5, \cdots$

velja, því við leitum eftir að staðla lausnina

því er lausnin

$$h(y) = h_{even}(y) + h_{odd}(y)$$

með

$$h_{even}(y) = a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^2 + \cdots$$

$$h_{odd}(y) = a_1 y + a_3 y^3 + \cdots$$

En, smá varúð

þegar $j \to \infty$ fæst $a_{j+2} \simeq \frac{2j}{j^2} a_j = \frac{2}{j} a_j$

Berum saman við

$$e^{y^2} \simeq 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} \cdots$$

með $a_{j+2} = \frac{2}{j} a_j$

þ.a. í ψ væru þá liðir með $e^{-\frac{y^2}{2}} e^{y^2} \to \infty$

þ. $y \to \infty$

ψ væri þá ekki staðlanlegt !

Aðeins ein lausn til

Íturnin verður að enda í $j = n$

þ.a $a_{n+2} = 0$

önnur röðin endar, hin verður

að vera 0 frá byrjun með

a_1 eða $a_0 = 0$

$$a_{j+2} = \frac{2j+1-K}{(j+1)(j+2)} a_j$$

$$K = 2n+1$$

stöðvar íturnina

En $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Einu staðlanlegu lausnirnar fást

fyrir þessi gildi á

orkunni

↓

Eigin ástönd með

strjála orku

Eiginlausnirnar eru

$$\boxed{\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\, a}} H_n\left(\frac{x}{a}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad \text{með} \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}$$

og fleirliður Hermite

$[\nu]$ er stærsta heilatala $\leq \nu$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

$$H_0(x) = 1$$

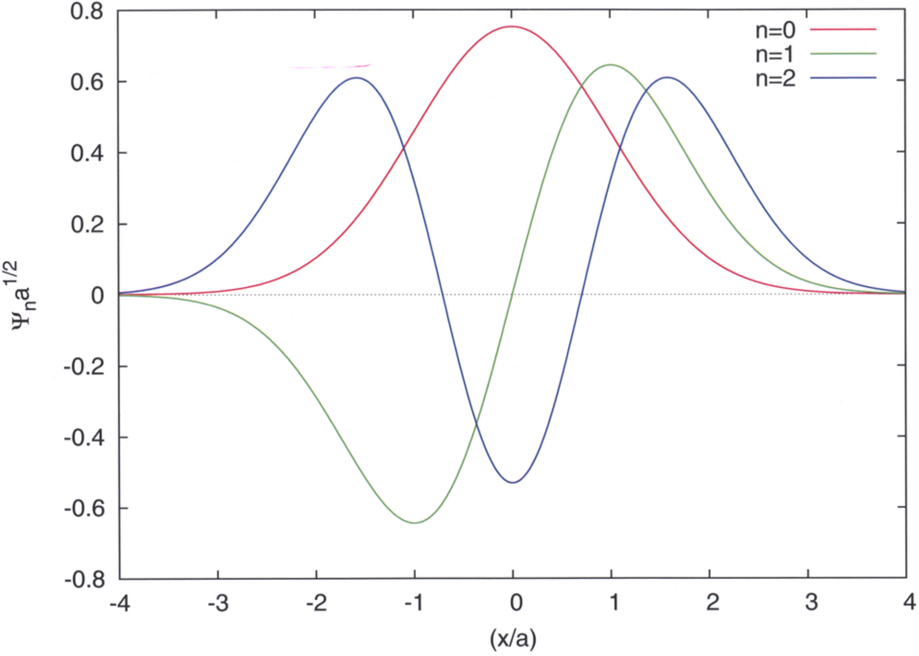
$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$\vdots$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ , \quad |t| < \infty$$



n=0
n=1
n=2
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
(x/a)
$\Psi_n a^{1/2}$

Frjáls eind

$$H = \frac{p^2}{2m}$$ fyrir frjálsa eind

$\rightarrow$ $H\psi = E\psi$ verður

$$-\frac{\hbar^2}{2m} d_x^2 \psi = E\psi$$

Hér er heppilegt að stala til jöfnuna

$$d_x^2 \psi = -k^2 \psi \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$$

búumst við $E \geq 0$ fyrir frjálsa eind

Almenna lausnin er

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Engin jaðarskilyrði takmarka k

Orkan er því

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

tímaháða bylgjufallið er því

$$\Psi(x,t) = A\exp\left[ik\left(x-\frac{\hbar k}{2m}t\right)\right] + B\exp\left[-ik\left(x+\frac{\hbar k}{2m}t\right)\right]$$

því tímalausnin er

$$\varphi(t) = \exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}t\right\} = \exp\left\{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t\right\}$$

$x - vt$

$x + vt$

fastur punktur á bylgjunni uppfyllir

$$x \pm vt = \text{fasti}$$

$$x = \mp vt + \text{fasti}$$

bylgja ferðast til vinstri ←

bylgja ferðast til hægri →

því er hægast að setja

$$\Psi_k(x,t) = A\exp\left\{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)\right\}$$

og

$$k = \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \begin{cases} k > 0 \longrightarrow \text{til hægri} \\ k < 0 \longleftarrow \text{til vinstri} \end{cases}$$

bylgjulengd $\lambda = \dfrac{2\pi}{|k|}$ k er bylgjutala „bylgjuvigur"

skriðþunginn $p = \hbar k$

eigingildi skriðþungavirkjans $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$

$$\hat{p}\Psi_k(x,t) = p\Psi_k(x,t) = \hbar k\Psi_k(x,t)$$

En, eitthvað er einkennilegt við „hraða“

$$v_{quantum} = \frac{\hbar |k|}{2m} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \sqrt{\frac{E}{2m}}$$

fyrir sígilda eind gildir $E = \frac{1}{2} m v^2$ og $V = 0$

$$v_{classical} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\longrightarrow \quad v_{classical} = 2\, v_{quantum} \quad ! \quad ?$$