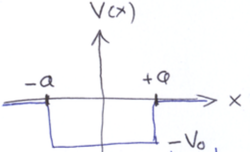
1

Skoða oddstæða lausn í endanlega brunninum.
Finna óbeina jöfnuna fyrir orku ástandsins.

Grunnástandið er jafnstætt, það er fundið í bók, jafna (2.151)

$$\psi(x) = \begin{cases} F e^{-\kappa x} & x > a \\ D\cos(\ell x) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$



Brunnur samhverfur um $x = 0$

Óbeina jafnan vegna samfellu ψ og ψ' ~~verð~~ þá (2.154)

$$\kappa = \ell \tan(\ell a)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \quad , \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

því hér er leitað af bundnum ástöndum

Fyrir oddstæða lausnina gerum við ráð fyrir

$$\psi(x) = \begin{cases} F e^{-kx} & x > a \\ D \sin(lx) & 0 < x < a \\ -\psi(-x) \end{cases}$$

til þess að lýsa andsamhverfunni

$\psi(x)$ er samfelt í $x=a$

$$\rightarrow \quad F e^{-ka} = D \sin(la)$$

$\psi'(x)$ er samfelt í $x = a$

$$\rightarrow \quad -Fk e^{-ka} = D l \cos(la)$$

$$\rightarrow \quad -K = l \frac{\cos(la)}{\sin(la)} = l \cot(la)$$

(Við höfum skrifað ψ þ.a. pá verður samfeldnin sjálfkrafa uppfyllt í $x=-a$)

eða $\boxed{-\kappa a = la \cot(la)}$ t.a. gera jöfnuna víddarlausa

í bók er notað táknunin $z = la$ og $z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$

$$\rightarrow \kappa^2 a^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}a^2 = -l^2a^2 + z_0^2$$
$$= -z^2 + z_0^2$$

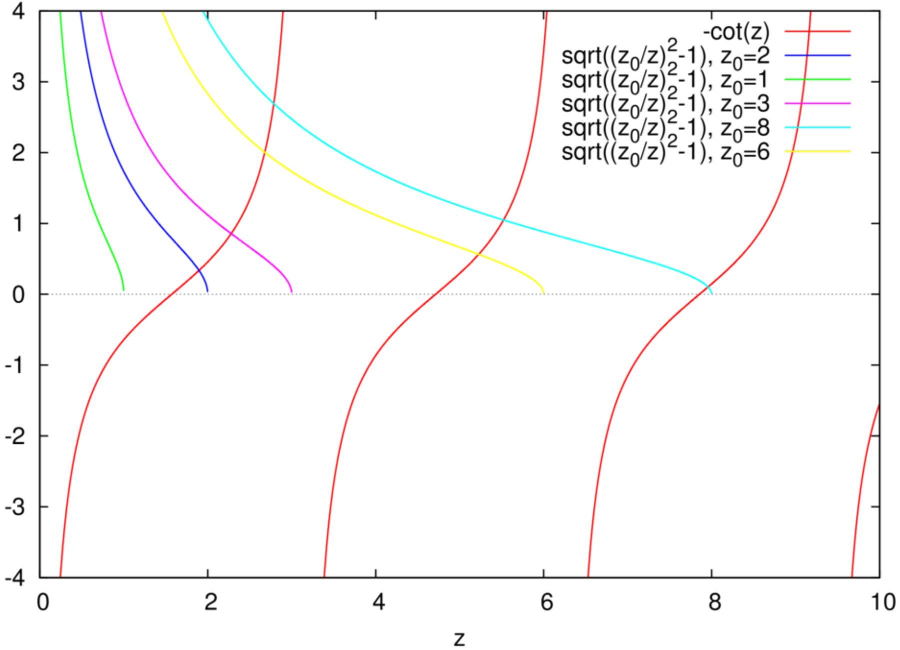
eða $\kappa^2 a^2 = z_0^2 - z^2$

og því verður óbeina jafnan

$$\boxed{\sqrt{z_0^2 - z^2} = -z\cot(z)}$$

eða

$$-\cot(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$


-cot(z)
sqrt((z0/z)2-1), z0=2
sqrt((z0/z)2-1), z0=1
sqrt((z0/z)2-1), z0=3
sqrt((z0/z)2-1), z0=8
sqrt((z0/z)2-1), z0=6
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
2
4
6
8
10
z

Markgildi

Víður + djúpur

$z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$ verður stór tala

Graf sýnir að núllstöðvar færast að $\pi, 2\pi, 3\pi \ldots$

$$z_n \approx (n\pi)^2 \quad \text{eða} \quad (l^2a)_n = \frac{2m(E_n+V_0)a^2}{\hbar^2} \approx (n\pi)^2$$

$$\rightarrow E_n + V_0 \approx \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 (n\cdot 2)^2 \pi^2}{2m(2a)^2}$$

sem er stan í óendanlegum brunni

Hér þarf að fara varlega með „n", ef miðað er við 2a fast einmitt önnur hver lausn fyrir óendanlega brunninn með lengd 2a

Grunnur þröngur brunnur

$z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$ er lítil tala

Grafið sýnir að engin lausn fæst fyrir $z_0 < \frac{\pi}{2}$
þá er engin bundin ástands lausn til

$z_0 < \frac{\pi}{2}$ jafngildir

$$\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{\hbar^2} 2mV_0 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\rightarrow V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

Lausn fyrir $z_0 = 2$

það er lausn á

$$\sqrt{\left(\frac{4}{z}\right)^2 - 1} + \cot(z) = 0$$

fyrir lægsta oddstæða fallið.
Grafið á blaðsíðu 4 gefur til kynna að lausnin sé á bilinu $1{,}5 < z < 2$

Maxima gefur $z_{röt} \approx 1.8955$

$$(z_{röt})^2 = (la)^2 = \frac{2m(E+V_0)a^2}{\hbar^2}$$

$$\rightarrow (E+V_0) = \frac{\hbar^2 (z_{röt})^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 4 (z_{röt})^2}{2m(2a)^2}$$

$$(E+V_0) = E_1 \cdot \frac{4}{\pi^2}(Z_{rót})^2 \quad , \quad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2a)^2}$$

Eins fást frá $Z_0 = 2 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$

æ $V_0 = \frac{\hbar^2 4}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 16}{2m(2a)^2} = E_1 \cdot \frac{16}{\pi^2}$

$$\rightarrow E = E_1 \left\{ \frac{4}{\pi^2}(Z_{rót})^2 - \frac{16}{\pi^2} \right\}$$

$$= \frac{E_1 4}{\pi^2}\left\{ (Z_{rót})^2 - 4 \right\} =$$

$$= -\frac{E_1 4}{\pi^2} \cdot 0{,}407 \approx -0{,}165 \cdot E_1$$

2.30

Staðla ψ í jöfnu (2.151) og ákvarða D og F

$$\psi(x) = \begin{cases} F e^{-\kappa x} & x > a \\ D \cos(lx) & 0 < x < a \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Lausnin er jafnstæð

$$\rightarrow \quad 1 = 2 \int_0^\infty dx \, |\psi(x)|^2$$

$$= 2 \left\{ \int_0^a dx \, |\psi(x)|^2 + \int_a^\infty dx \, |\psi(x)|^2 \right\}$$

$$= 2\left\{ |D|^2 \int_0^a dx \cos^2(lx) + |F|^2 \int_a^\infty dx\, e^{-2Kx} \right\}$$

$$= 2\left\{ |D|^2 \left[\frac{\sin(2al) + 2al}{4l} \right] + |F|^2 \frac{e^{-2Ka}}{2K} \right\}$$

F og D eru tengd vegna samfellu ψ

$$\psi(a^+) = \psi(a^-) \;\rightarrow\; F e^{-Ka} = D \cos(la)$$

$$\rightarrow F = D e^{Ka} \cos(la)$$

Því er stöðlunin

$$1 = 2|D|^2 \left\{ \frac{\sin(2al) + 2al}{4l} + \frac{\cos^2(la)}{2K} \right\}$$

κ og l þarf líka að tengja saman

(2.154) $\longrightarrow$ $\kappa = l\tan(la)$

$$\rightarrow \quad 1 = 2\cdot|D|^2\left\{\frac{a}{2} + \frac{\sin(2al)}{4l} + \frac{\cos^2(la)}{2l\tan(la)}\right\}$$

$$= 2\cdot|D|^2\left\{\frac{a}{2} + \frac{\sin(la)\cos(la)}{2l} + \frac{\cos^3(la)}{2l\sin(la)}\right\}$$

$$= |D|^2\left\{a + \frac{\sin(la)\cos(la)}{l} + \frac{\cos^3(la)}{l\cdot\sin(la)}\right\}$$

$$= |D|^2\left\{a + \frac{\cos(la)}{l\sin(la)}\left[\sin^2(la) + \cos^2(la)\right]\right\}$$

$$1 = |D|^2 \left\{ a + \frac{\cos(la)}{l \sin(la)} \right\} = |D|^2 \left\{ a + \frac{1}{l \tan(la)} \right\}$$

$$= |D|^2 \left\{ a + \frac{1}{k} \right\} \quad \longrightarrow \quad D = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{k}}}$$

er lausn

---

og áður fékkst $F = D e^{ka} \cos(la)$

$$\longrightarrow \quad F = \frac{e^{ka} \cos(la)}{\sqrt{a + \frac{1}{k}}}$$

er lausn fyrir F