Óendanlegur mættisbrunnur

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Höfum fundið lausnir

$$\psi_n(x) = A_n \sin(k_n x)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Þurfum að norma lausnirnar

$$|A_n|^2 \int_0^a dx \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$= |A_n|^2 a \int_0^a \frac{dx}{a} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

$$= |A_n|^2 a \int_0^1 du \sin^2(n\pi u)$$

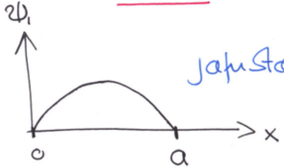
$$= |A_n|^2 \frac{a}{2} = 1$$

$$\longrightarrow \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

Grunnástand

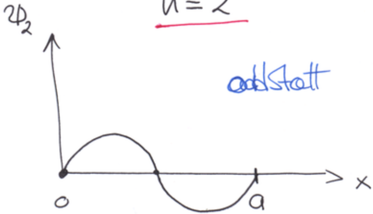
$n = 1$



jafnstætt

1. örvaða ástandið

$n = 2$



oddstætt

2. örvaða ástandið

$n = 3$

jafnstætt

Örvuð ástönd fleiri núllstöðvar

Hærri orka -> fleiri núllstöðvar og meiri sveigja

$H\psi = E\psi$

Eiginföllin lýsa
sístæðum ástöndum

Eind í eiginástandi
verður þar þangað
til hún verður fyrir
truflun

Eiginástöndin eru
hornrétt (bylgjuföllin)

(sjá bók)

$$\int_0^a \psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\,dx = \delta_{m,n}$$

Kronecker-delta

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{ef } m \neq n \\ 1 & \text{ef } m = n \end{cases}$$

Eiginföllin mynda fullkominn
grunn

"Öll þjál föll með sömu jaðarst.
á sama bili má liða í
þeim

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

skoðum betur síðar

þ.a.

$$c_n = \int dx\, \psi_n^*(x)\, f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

Fyrir almennu lausnina fáum við

$$\langle H \rangle = \int dx\, \Psi^* H \Psi$$

$$= \int dx \left\{ \sum_m c_m \psi_m \right\}^* H \left\{ \sum_n c_n \psi_n \right\}$$

$$= \sum_{nm} c_m^* c_n E_n \int dx\, \psi_m^* \psi_n$$

$$= \sum_n |c_n|^2 E_n$$

Meðalgildi orkunnar er fast

Sönnum betur við við að líkurnar fyrir að mæling á orkunni í $\Psi(x,t)$ gefi E_n eru föst, $|c_n|^2$ óháð tíma

5

Hreintóna sveifillinn

Kömumst við sigilda kerfið lýst með lögmáli Hookes

$$\boxed{F = -kx = m d_t^2 x}$$

Sígilda hreyfijafnan með lausn

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

þ.s. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Mættisorkan er

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

umritum mættiorkuna sem

$$V(x) = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Mjög oft er þetta mætti góð nálgun fyrir ýmis mætti nærri staðbundnu lágmarki

Jafna Schrödingers fyrir hreintóna sveifilinn

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}d_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\}\psi = E\psi$$

Lausnirnar eru mjög mikilvægar því svipuð mætti koma oft fyrir

Margar mismunandi lausnar-aðferðir

Við munum kanna algebru lausn

og beina lausn afleiðujöfnunar

tengist síðari aðferða fræði til þess að lýsa fjölenda kerfum

Algebruaðferð

sístæðu ástöndum hreintóna sveifilsins er lýst með

$$H\psi = E\psi$$

þ.s.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p^2 + (m\omega x)^2\right)$$

Reynum að þátta með

$$a_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left\{\mp ip + m\omega x\right\}$$

og munum að x og p eru virkjar hér

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}(ip + m\omega x)(-ip + m\omega x)$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left\{p^2 + (m\omega x)^2 - im\omega(xp - px)\right\}$$

$$xp - px \equiv [x, p]$$ Víxl x og p

víxlin þurfa ekki að hverfa, ef ekki þá víxlast x og p ekki, virkjar

$$a_- a_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[p^2 + (m\omega x)^2\right] - \frac{i}{2\hbar}[x, p]$$

athugum víxlin

virkjar verká föll

í fallarúmi

$$[x,p]f = x(pf) - p(xf)$$

munum að $p = -i\hbar\partial_x$ hér

$$\to x(pf) - p(xf)$$

$$= x(pf) - x(pf)$$

$$-(px)f$$

$$= -(-i\hbar\partial_x x)f$$

$$= i\hbar f$$

óháð ástandi f

því er venjulega skrifað

$$\boxed{[x,p] = i\hbar}$$

þessi víxl verða síðar

krofa okkar um skömmtun

(kórskömmtun) lýsingar

kerfa

víxlin

$$a_-a_+ = \frac{1}{\hbar\omega}\left\{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}H + \frac{1}{2}$$

$$\to H = \hbar\omega\left\{a_-a_+ - \frac{1}{2}\right\}$$

Enn er ekki ljóst hvers vegna þessi þáttun hjálpi við lausn jöfnu Schrödingers

Nú er mikilvægt að sjá að

$$\underbrace{a_+ a_-}_{\text{Önnur röð}} = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow H = \hbar\omega\left\{a_+ a_- + \frac{1}{2}\right\}$$

og

$$[a_-, a_+] = 1$$

Virkjarnir a_+ og a_- víxlast ekki heldur

Gerum ráð fyrir að ψ sé lausn með orku E

skoðum þá hvað $(a_+\psi)$ er

$$H(a_+\psi) = \hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)(a_+\psi)$$

$$= \hbar\omega\left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+\right)\psi$$

$$= \hbar\omega\, a_+\left(a_- a_+ + \frac{1}{2}\right)\psi$$

$$= a_+\left\{\hbar\omega\left(\underbrace{a_+ a_- + 1}_{= a_- a_+} + \frac{1}{2}\right)\psi\right\}$$

$$a_+(H+\hbar\omega)\psi = a_+\underbrace{(E+\hbar\omega)}_{\text{hreinar tölur}}\psi = (E+\hbar\omega)(a_+\psi)$$

→ $(a_+\psi)$ er lausn á Schrödinger jöfnunni með orku $E+\hbar\omega$

Eins má sýna að $(a_-\psi)$ er lausn á jöfnunni með orku $E-\hbar\omega$

$$H(a_-\psi) = (E-\hbar\omega)(a_-\psi)$$

Ef við þekkjum lausn ψ þá getum við fundið fleiri með hækkunarvirkjanum a_+ eða lækkunarvirkjanum a_-

stundum nefndir sköpunar og eyðingarvirkjar
skapa eða eyða orku skammti

Við búumst ekki við óendanlega lágum orkugildum í þessu mætti

Til hlýtur að vera lægsta stigið, grunn-ástandið þ.a.

$$a_- \psi_0 = 0$$

Einmitt jafnan til þess að ákvarða það því

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left\{\hbar d_x + m\omega x\right\}\psi_0 = 0$$

fyrsta stigs afl. j.

$$d_x \psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

heildum

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0$$

$$\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\, dx$$

$$\rightarrow \ln(\psi_0) = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

$$\rightarrow \psi_0(x) = A e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Normun

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_0|^2 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = a|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a}\, e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= a|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2} = a|A|^2 \sqrt{\pi} = 1$$

$$\rightarrow |A|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \quad a \quad A = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

Grka ψ_0

$$H\psi_0 = E_0 \psi$$

$$\hbar\omega \left\{ a_+ a_- + \frac{1}{2} \right\} \psi_0 = E_0 \psi$$

$$a_- \psi_0 = 0 \longrightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Orkurófið verður því

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

og ástöndin hafa bylgjuföllin

$$\phi_n(x) = A_n (a_+)^n \phi_0(x)$$