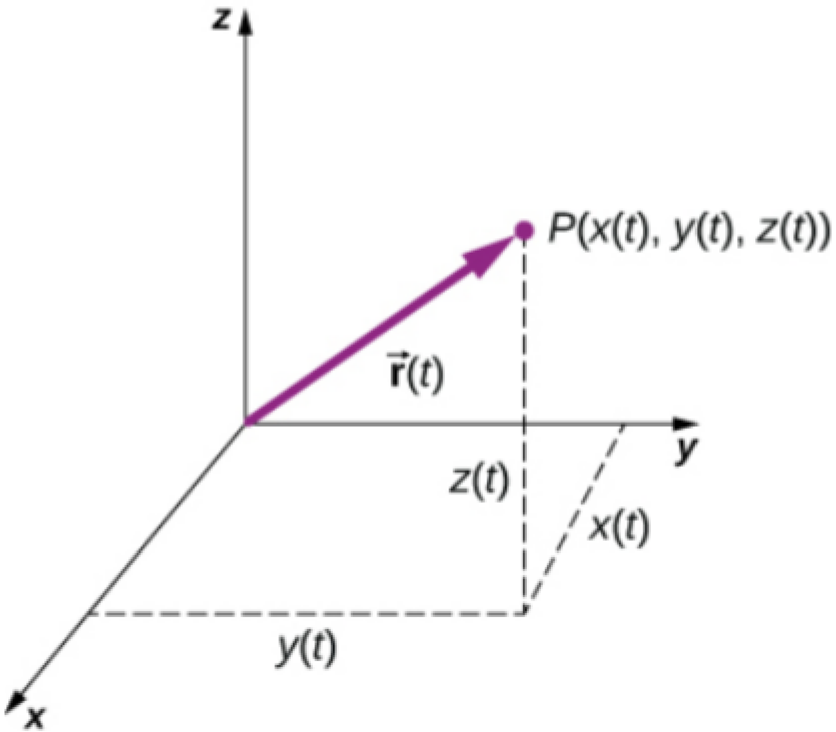
# þrí- og tvívíð hreyfing




$$\bar{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$= (x(t), y(t), z(t))$$

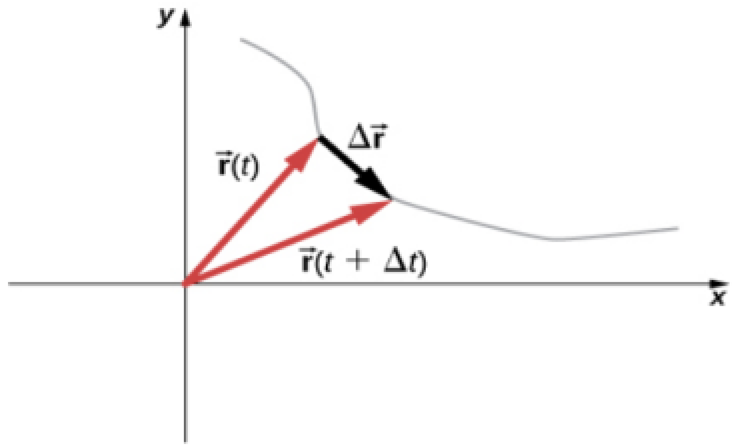
**Figure 4.2** A three-dimensional coordinate system with a particle at position $P(x(t), y(t), z(t))$.

Staðsetning og hliðrun

openstax

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}.$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$



## Independence of Motion

In the kinematic description of motion, we are able to treat the horizontal and vertical components of motion separately. In many cases, motion in the horizontal direction does not affect motion in the vertical direction, and vice versa.

openstax

við eigum eftir að læra um hreyfijöfnur, sem hægt er að leiða út frá lögmálum Newtons

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

ef hreyfijöfnurnar fyrir hvert hnit "blanda" ekki hnitum þá er hægt að leysa hverja fyrir sig og líta svo á að þættir hreyfingarinnar séu óháðir

(við notum kartísk hnit og eigum við einfalda krafta til að byrja með)

Dæmi (Ex. 4.6)

Upphaf: $t = 0$, $\overline{r}(0) = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$

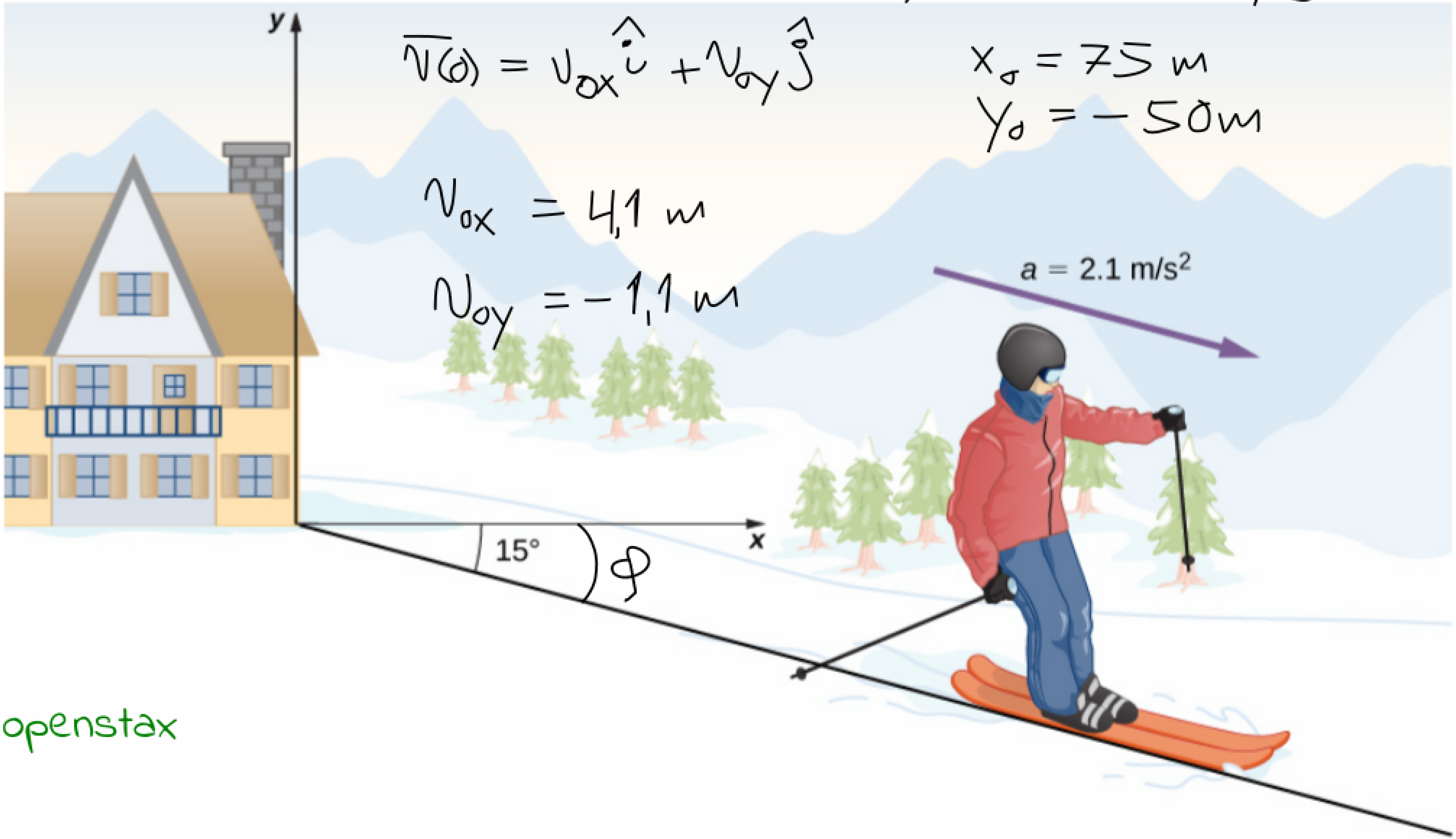
$\overline{v}(0) = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$

$x_0 = 75\ m$

$y_0 = -50\ m$

$v_{0x} = 4{,}1\ m$

$v_{0y} = -1{,}1\ m$




openstax

**Figure 4.10** A skier has an acceleration of $2.1\ m/s^2$ down a slope of $15°$. The origin of the coordinate system is at the ski lodge.

Finna staðsetningu og hraða sem fall af tíma

Seinna lærum við að þyngdarkrafturinn sé lóðréttur, þannig að lárétti þáttur hröðunarinnar gæti aðeins komið frá vindi eða einhverjum hreyfli sem skíðakonan hefði, en látum það vera.

$$a_x = a\cos(-\varphi) = a\cos\varphi, \quad a = |\bar{a}|$$

$$a_y = a\sin(-\varphi) = -a\sin\varphi, \quad \varphi = 15^\circ$$

$$\longrightarrow \quad \bar{a} = a(\cos\varphi, -\sin\varphi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} + a\cos\varphi \cdot t \\ v_y(t) &= v_{y0} - a\sin\varphi \cdot t \end{aligned}}, \qquad t_0 = 0$$

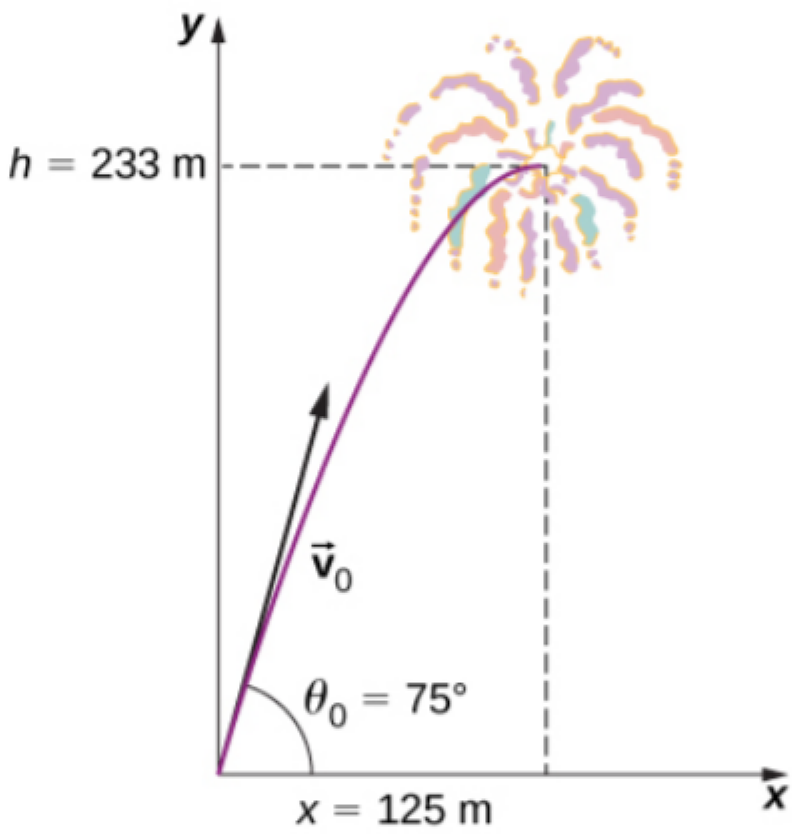
$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a\cos\varphi}{2}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{a\sin\varphi}{2}t^2$$

Síðan get ég sett inn tölurnar sem voru gefnar í upphafi til að svara enn nákvæmar, en ég setti ekki inn tölur fyrir hröðunina og hornið í upphafi því á þessum hátt get ég spurt spurninga um hvað gerist þegar horninu er breytt og álíka spurningum.

Því getur verið best að bíða með að setja inn tölur til að halda meiri upplýsingum í jöfnunum. Eins er þægilegt að þurfa ekki að burðast um með einingar. Hér að lokum er auðvelt að sannreyna að allar víddir eru í lagi.

# Dæmi (Ex. 4.7)




Einungis þyngdarhröðun
Springur í hæsta punkti

$$V_0 = 70 \ m/s$$

Finna $\Delta t$ til sprengingar
Finna h og $\Delta x$
Finna fjarlægð s frá upphafspunkti og horn

Setjum $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g, \quad g = 9{,}81 \ m/s^2$$

Hápunktur hreyfingarinnar næst þegar $v_y(t) = 0$

$$v_y^2(t) = v_{y0}^2 - 2gy$$

$$0 = v_{y0}^2 - 2gy \rightarrow y = \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

og $\quad v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$

$$\boxed{y = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}}$$

þekkjum allar stærðir hér

$$y = \frac{(70)^2 \, m^2/s^2 \, \sin^2\left(\frac{75\pi}{180}\right)}{2 \cdot 9{,}81 \, m/s^2} \approx \underline{233\,m}$$

$\Delta t$ ?

Höfum $v_y(t) = v_{y0} - gt$ , Efst $v_y(t) = 0$

$\rightarrow$ $0 = v_{y0} - gt$ $\rightarrow$ $\Delta t = t = \dfrac{v_{y0}}{g}$

$$\rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{70 \cdot \sin\left(\frac{75\pi}{180}\right)s}{9.81} = \underline{6{,}9\,s}$$

$\Delta x$ ?

$$x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos\theta_0 \, \Delta t$$

$$= v_0 \cos\theta_0 \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cos\theta_0 \sin\theta_0$$

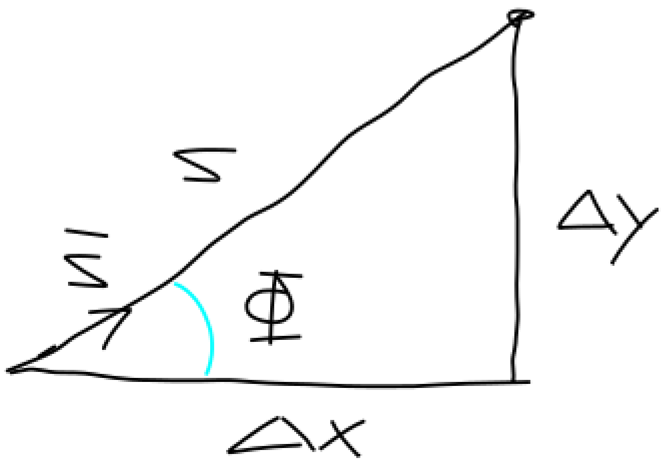
$$\simeq \underline{125\,m}$$

## Heildarhliðrun að sprengingu

$$\bar{s} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} = \left(125\,\hat{i} + 233\,\hat{j}\right)\text{m}$$

$$\rightarrow \quad |\bar{s}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \simeq 264\text{ m}$$

## Stefna að sprengistað, $\Phi$




$$\tan\Phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \quad \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \Phi$$

$$= \arctan\left(\frac{233}{125}\right) = 1{,}078\text{ rad}$$

$$= 1{,}078 \cdot \frac{180}{\pi} = 61{,}8^\circ$$

# Kastbrautin, flugtími og seilni

Án loftviðnáms er brautin samhverf um hápunkt, við vorum búin að finna tímann frá upphafi þegar $t = 0$ að hápunkti, tvöfaldur þessi tími er þá flugtíminn

$$\boxed{T_{Total} = \frac{2(v_0 \sin\theta_0)}{g}}$$

Við vorum með

$$(1) \quad x = (v_0 \cos\theta_0)t \quad , \quad x_0 = 0 \,,\ t_0 = 0 \,,\ y_0 = 0$$

og

$$(2) \quad \underbrace{y = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{g}{2}t^2}$$

getum við losnað við t og fengið brautar jöfnu: $\overbrace{y = ax + bx^2}^{\text{Fleygbogi}}$ ?

reynum

1 $\rightarrow$ $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta_0}$

$\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ $y = \dfrac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0} x - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$

$\rightarrow$ $\boxed{y = \tan\theta_0 \cdot x - \dfrac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} x^2}$

Fleygbogi $\quad y = ax + bx^2$

með fasta $\quad a = \tan\theta_0 \quad$ og $\quad b = -\dfrac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$

Seilni

$$Y = \left[\tan\theta_0 - \frac{g\,x}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\right]x$$

nú gildir að $y = 0$ í upphafi og í lokin

Lausnin í upphafi er $x = 0$, en jafnan hefur aðra núllstöð

$$Y = 0 \quad \text{þegar} \quad \tan\theta_0 - \frac{gx}{2(v_0\cos\theta_0)^2} = 0$$

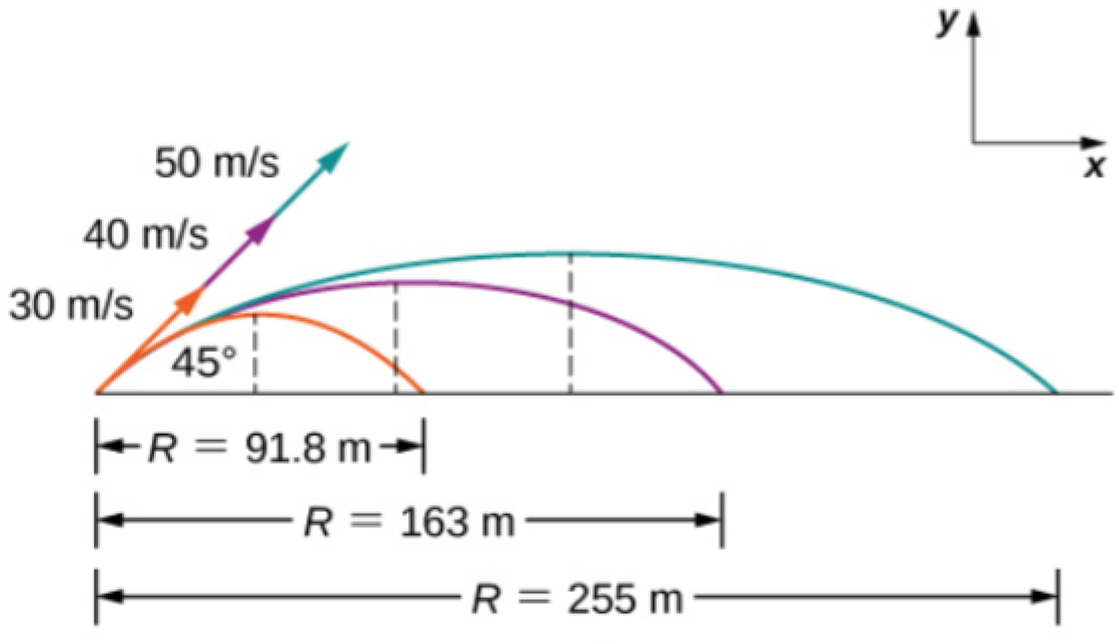
$$\longrightarrow \quad x = \tan\theta_0 \frac{2(v_0\cos\theta_0)^2}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

því er seilnin R

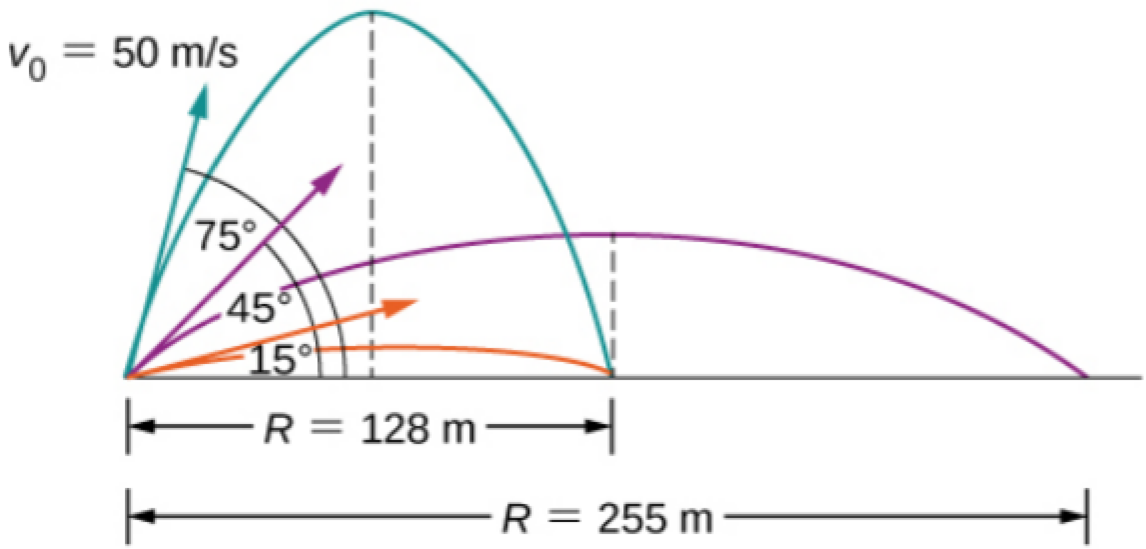
$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta_0)}\,,\qquad 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin(2\theta_0)$$

## þýðing niðurstaðna

án loftviðnáms

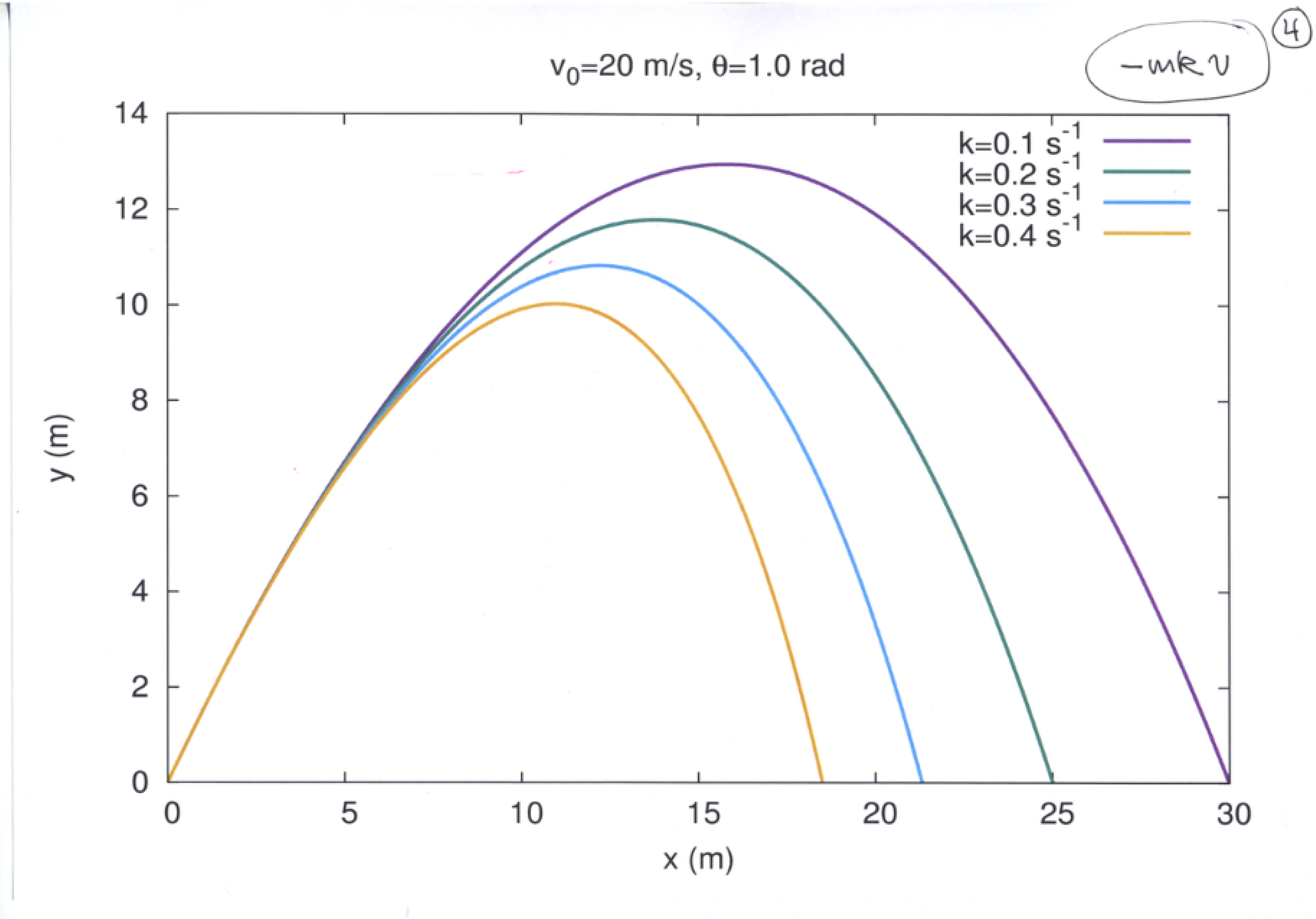


(a)



(b)

Með loftviðnámi í réttu hlutfalli við ferð




samhverfan hverfur með loftviðnámi