Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Eðlisfræðiskor

09.21.64 Eðlisfræði þéttefnis I

Mánudaginn 21. desember 1998, kl. 9-13.

Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva.

1. Einfaldri sexhyrndri (simple hexagonal) Bravais grind kristalls er lýst með grunnvigrunum

$$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{a}_3 = c\hat{\mathbf{z}}$$

   (a) Sýnið að nykurgrindin sé einnig einföld sexhyrnd grind, með grindarföstum $2\pi/c$ og $4\pi/(\sqrt{3}a)$, sem snúið hefur verið um 30 gráður um z-ásinn miðað við Bravais grindina í staðarrúminu.

   (b) Fyrir hvaða gildi á hlutfallinu c/a verður það óbreytt fyrir samsvarandi grunnvigra í staðar- og nykurrúminu?

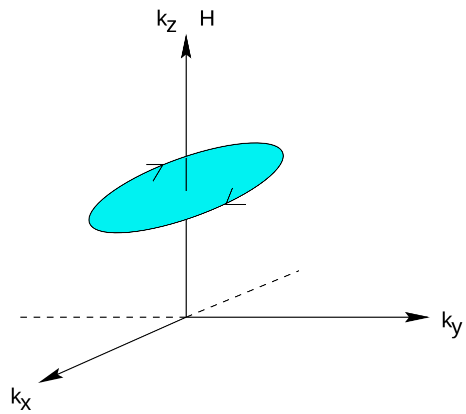
   (c) Bravais grind með þremur jafnlöngum grunnvigrum með sama horn θ sín á milli er þekkt undir nafninu þríhyrningsgrind (trigonal lattice). Sýnið að nykurgrindin sé einnig þríhyrningsgrind með horn θ^* sem uppfyllir jöfnuna

$$-\cos\theta^* = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

   (d) Hver er lengd grunnvigra þríhyrningsgrindarinnar í nykurrúminu?

2. Teiknið og skýrið (100), (010), (011) og (101) sléttturnar í einfaldri teningsgrind.

3. Ákvarðið hvort brautin á myndinni umlyki tóm eða setin ástönd



Hvað er hægt að segja um brautina í staðarrúminu?

4. Ástandaþéttleika hljóðeinda má skrifa sem yfirborðsheildi

$$g(\omega) = \sum_s \int \frac{dS}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\nabla \omega_s(\mathbf{k})|}$$

á yfirborðinu $\omega_s(\mathbf{k}) =$ fasti, innan fyrsta Brillouins svæðisins.

(a) Sýnið að ástandaþéttleiki hljóðeindanna í Debye líkaninu sé

$$g(\omega) = \frac{3}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3}$$

ef hljóðhraðinn er skilgreindur sem

$$\frac{1}{c^3} = \frac{1}{3} \sum_2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{c_s^3(\mathbf{k})}.$$

Fyrir hreintóna kristall er þetta nákvæmur ástandaþéttleiki fyrir lága tíðni.

(b) Sýnið að í d-víðum hreintóna kristalli sé þéttleiki lágtíðni hljóðeinda ω^{d-1}.

(c) Leiðið því út að varmarýmd hreintóna kristalls við lága tíðni hverfi eins og T^d í d víddum.

(d) Leiðið einnig út að varmarýmd kristalls myndi hverfa eins og $T^{d/\nu}$ ef tvístursamband lágtíðni hljóðeinda hans væri $\omega \sim k^\nu$ í staðinn fyrir línulega sambandið.

5. Lýsið setningu Blochs og helstu afleiðingum hennar.

6. Hvað er Brillouin svæði? Gefið dæmi um fyrsta og annað Brillouin svæðið.

Jöfnur fyrir 09.21.64

$$\vec{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}} = -i\hbar\vec{\nabla}, \qquad \mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{4\pi r_s^3}{3}, \qquad \vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad \vec{v} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) = 2\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}F(\vec{k}), \qquad f(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mu)\beta}+1}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$n = 2\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}f(\mathcal{E}(\vec{k})), \qquad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V, \qquad \lim_{T\to 0}\mu = \mathcal{E}_F$$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{E}\, g(\mathcal{E})\mathcal{E} f(\mathcal{E}), \qquad e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} = 1, \qquad \vec{b}_i\cdot\vec{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$$

$$\vec{b}_1 = 2\pi\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_2 = 2\pi\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_3 = 2\pi\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)}$$

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{n\vec{k}}(\vec{r}), \qquad \psi(\vec{r}+\vec{R}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\psi(\vec{r}), \qquad \vec{v}_n(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_{\vec{k}}\mathcal{E}_n(\vec{k})$$

$$g_n(\mathcal{E}) = 2\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\delta(\mathcal{E}-\mathcal{E}_n(\vec{k})), \qquad g_n(\mathcal{E}) = 2\int_{S_n(\mathcal{E})}\frac{dS}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{\nabla}\mathcal{E}_n(\vec{k})|}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_n(\vec{k}), \qquad \hbar\dot{\vec{k}} = -e\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{v}_n(\vec{k})\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]$$

$$\vec{k}(t) = \vec{k}(0) - \frac{e\vec{E}t}{\hbar}, \qquad \left[M^{-1}(\vec{k})\right]_{ij} = \pm\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}(\vec{k})}{\partial k_i\partial k_j}$$

$$E = \sum_{\vec{k}s}(n_{\vec{k}s}+\frac{1}{2})\hbar\omega_s(\vec{k}), \qquad g(\omega) = \sum_s\int\frac{dS}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{\nabla}\omega_s(\vec{k})|}$$

$$\mu_i = \mathcal{E}_v + \frac{1}{2}E_g + \frac{3}{4}k_b T\ln\left(\frac{m_v}{m_c}\right), \qquad \langle n\rangle = \frac{\sum N_j e^{-\beta(E_j-\mu N_j)}}{\sum e^{-\beta(E_j-\mu N_j)}}$$