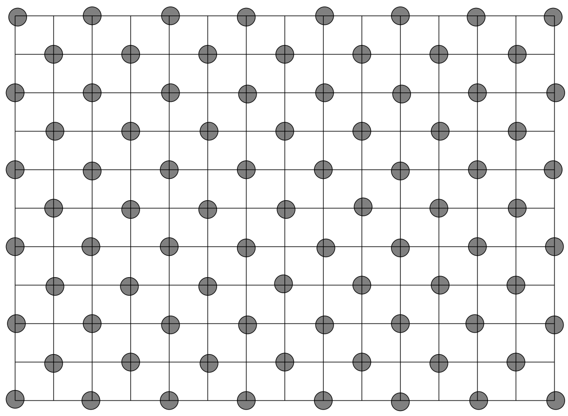
Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Eðlisfræðiskor

09.21.64 Eðlisfræði þéttefnis I

Föstudaginn 15. desember, kl. 14-18.

Leyfileg hjálpargögn eru: Vasatölva.

1. Tvívíður kristallur atóma sem raðast hafa á ferningsgrind er eins og myndin sýnir.



   (a) Sýnið dæmi um frumgrindareiningu (primitive unit cell).
   (b) Reiknið og teiknið nykurgrindina (reciprocal lattice).
   (c) Hvað er Bragg-speglun?
   (d) Skilgreinið og sýnið fyrsta og annað Brillouin-svæðið.
   (e) Hvernig tengjast 1. og 2. Brillouin-svæðið með vigrum nykurgrindarinnar?

2. Svarið eftirfarandi spurningum um gas frjálsra rafeinda í tvívídd:

   (a) Hvernig tengjast rafeindaþéttleikinn n og Fermíbylgjuvigurinn k_F?
   (b) Hvernig tengjast k_F og r_s?
   (c) Leiðið út jöfnu fyrir ástandaþéttleika rafeindanna $g(\mathcal{E})$.

3. Í einvíðum kristalli er orkuborða lýst mð jöfnunni

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_1 + (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2)\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right),$$

þar sem a er grindarstuðullinn og $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ eru rauntölufastar. Hugsið ykkur eina rafeind í borðanum sem ekki rekst á neina veilu í fullkomnum stjörfum kristallinum og svarið:

   (a) Reiknið og teiknið lauslega graf af virkum massa og hraða rafeindarinnar.

   (b) Hvað gildir um staðsetningu rafeindarinnar í kristallinum?

   (c) Hvernig bregst rafeindin við ytra föstu rafsviði þegar hún er í lágmarki borðans? En þegar hún er nærri hámarki borðans? Og að síðustu þegar hún er í orkumiðju borðans?

4. Ein tegund rafgjafa hefur mörg möguleg bundin ástönd merkt með orkunni $\mathcal{E}_i$.

   (a) Ef Coulomb-fráhrinding rafeindanna veldur því að í mesta lagi eitt orkustig rafgjafans er setið hverjar eru þá sætnilíkur $\langle n\rangle$ eins rafgjafa?

   (b) Hvernig verða líkurnar $\langle n\rangle$ þegar orkumunur lægstu stiganna er meiri en k_BT?

   (c) Hvenær er hægt að nota Vetnislíkanið til þess að lýsa orkustigum rafgjafa?

5. Tvístrun sveifluhátta hreintóna línulegrar einsatóma keðju þar sem atómin víxlverkast aðeins við næstu granna er

$$\omega(k) = \omega_0\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|.$$

ω_0 er hæsta tíðnin fyrir k á svæðamörkunum.

   (a) Reiknið ástandaþéttleika sveifluháttanna.

   (b) Hvað eru sérstöðupunktar von Hove?

   (c) Skýrið mun hljóðlægra (acoustical) og ljóslægra (optical) hljóðeindagreina.

6. Skýrið snertispennu (contact potential) tveggja málma.

Jöfnur fyrir 09.21.64

$$\vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = -i\hbar \vec{\nabla}, \qquad \mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{4\pi r_s^3}{3}, \qquad \vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \qquad \vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) = 2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} F(\vec{k}), \qquad f(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mu)\beta} + 1}, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$n = 2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} f(\mathcal{E}(\vec{k})), \qquad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V, \qquad \lim_{T\to 0} \mu = \mathcal{E}_F$$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{E}\, g(\mathcal{E}) \mathcal{E} f(\mathcal{E}), \qquad e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} = 1, \qquad \vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$$

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{n\vec{k}}(\vec{r}), \qquad \psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{r}), \qquad \vec{v}_n(\vec{k}) = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \mathcal{E}_n(\vec{k})$$

$$g_n(\mathcal{E}) = 2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n(\vec{k})), \qquad g_n(\mathcal{E}) = 2 \int_{S_n(\mathcal{E})} \frac{dS}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{\nabla}\mathcal{E}_n(\vec{k})|}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_n(\vec{k}), \qquad \hbar \dot{\vec{k}} = -e \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \vec{v}_n(\vec{k}) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \right]$$

$$\vec{k}(t) = \vec{k}(0) - \frac{e\vec{E}t}{\hbar}, \qquad \left[M^{-1}(\vec{k}) \right]_{ij} = \pm \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\vec{k})}{\partial k_i \partial k_j}$$

$$E = \sum_{\vec{k}s} (n_{\vec{k}s} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_s(\vec{k}), \qquad g(\omega) = \sum_s \int \frac{dS}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{\nabla}\omega_s(\vec{k})|}$$

$$\mu_i = \mathcal{E}_v + \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} k_b T \ln\left(\frac{m_v}{m_c}\right), \qquad \langle n \rangle = \frac{\sum N_j e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}{\sum e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}$$