Eiginleikar Lorentz ummyndana

Samlagning hraða

ef $x' = \Lambda(\alpha)\, x$ þá:

$$x_0'^2 - |\vec{x}'|^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2$$

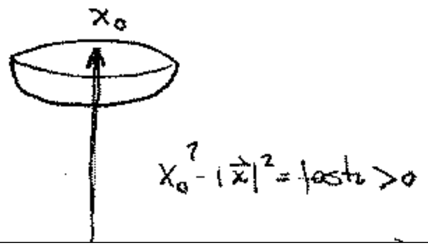
Mengin

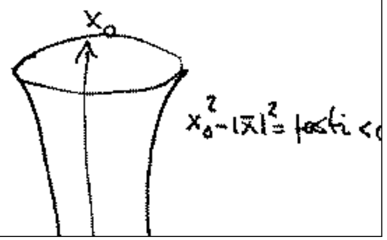
$$\{ (x_0, \vec{x}) \mid x_0^2 - |\vec{x}|^2 = \text{fasti} \}$$

eru gleiðbogafletir í $\mathbb{R}^4$

$$\text{gleiðbogafl.} \xrightarrow{\Lambda(\alpha)} \text{gleiðbogafl.}$$

bera saman við snúning

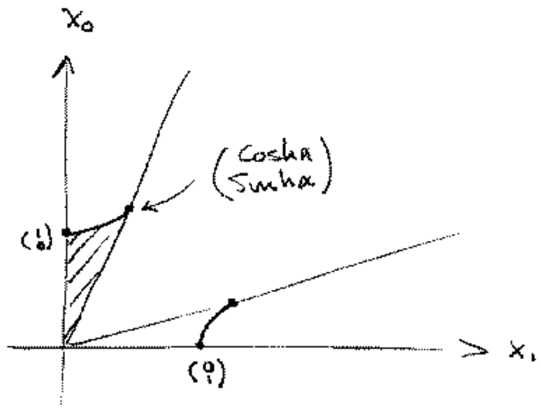




Ljóskeila $\to$ ljóskeilu

en markgildið þegar fasti $= 0$

Merking α



$\alpha = 2 \cdot$ flatarmál skyggða svæðisins

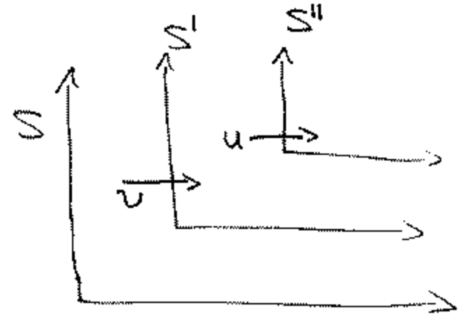
Samlagningarjafna fyrir cosh, sinh gefur

$$\Lambda(\alpha_1) \cdot \Lambda(\alpha_2) = \Lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$$

í samræmi við flatarmáls túlkunina

$$\Lambda(\alpha_1)\Lambda(\alpha_2) = \Lambda(\alpha_1+\alpha_2)$$

$\longrightarrow$ Jafna fyrir hraðasamlagningu



Með hvaða hraða hreyfist $\underline{S''}$ miðað við $\underline{S}$
nefnum hann w ?

$$\frac{v}{c} = \tanh\alpha_1$$

$$\frac{u}{c} = \tanh\alpha_2$$

$$\frac{w}{c} = \tanh\alpha_3$$

Vitum

$$\Lambda(\alpha_3) = \Lambda(\alpha_2)\,\Lambda(\alpha_1)$$

$$= \Lambda(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\longrightarrow \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\longrightarrow \quad \frac{w}{c} = \tanh(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$= \frac{\tanh\alpha_1 + \tanh\alpha_2}{1+\tanh\alpha_1\cdot\tanh\alpha_2}$$

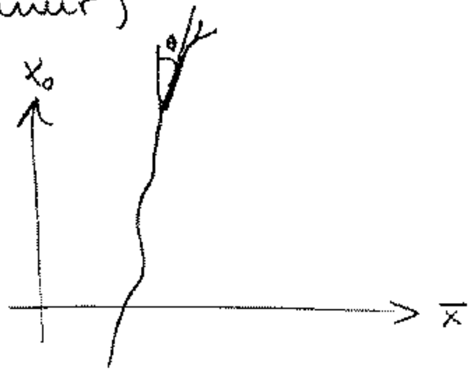
$$= \frac{\frac{v}{c} + \frac{u}{c}}{1+\frac{v}{c}\cdot\frac{u}{c}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{w = \frac{u+v}{1+\frac{v\cdot u}{c^2}}}$$

ef $u\cdot v \ll c^2 \longrightarrow w = u+v$

Eigintími og fjórhraði

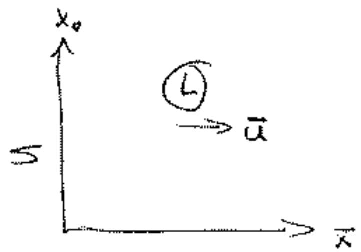
hreyfinghluta er ferli í $(x^0, \bar{x})$-rúmi (heimslínur)



$\tan\theta = \frac{|\bar{u}|}{c}$, $\bar{u}$ er hraðinn

$|\bar{u}| < c \longrightarrow$ snertill við feril liggur ávallt innan ljóskeilu með topp í snertipunkt.

Eigintími klukku



Klukka á jöfnum hraða miðað við S

Klukkan sýnir tímann τ
þá gildir:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{|\bar{u}|^2}{c^2}}\,\Delta t$$

t: er tíminn í fasta kerfinu S

Skiptum heimslínunni í nógu smá bil þ.a. u sé fasti á hverju bili

$$\longrightarrow \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{|\bar{u}(t)|^2}{c^2}}\,dt$$

Ef $\tau_1 : t_1$
$\tau_0 : t_0$

$$\longrightarrow \quad \tau_1 - \tau_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{|\bar{u}(t)|^2}{c^2}}\,dt$$

er í raun viðbót við forsendurnar

hér má nota hraða S sem er $u' t'$ ...

Lorentz ummyndanir fyrir hraða

Vitum í S

$$\overline{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad u_i = \frac{dx_i}{dt}$$

Viljum reikna

$$\overline{u}' = (u_1', u_2', u_3') \qquad u_i' = \frac{dx_i'}{dt'}$$

í S' sem hreyfist með v í stefnu x_1

Vitum

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx_1\right)$$

$$dx_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dx_1 - v\,dt\right)$$

$$dx_2' = dx_2$$

$$dx_3' = dx_3$$

$u_i' = \frac{dx_i'}{dt'}$

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{vu_1}{c^2}}$$

$$u_2' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}\,u^2}{1 - \frac{vu_1}{c^2}}$$

u_3' = samskonar

Einfaldara er að nota (eigintímann)

$$\tilde{u}_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau}$$

þar sem $d\tau = \sqrt{1 - \frac{|\overline{u}|^2}{c^2}}\,dt = \sqrt{1 - \frac{|\overline{u}'|^2}{c^2}}\,dt'$

$$\longrightarrow \tilde{u}_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\overline{u}|^2}{c^2}}}\,u_i \qquad i = 1,2,3$$

og bæta við $\quad \tilde{u}_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{|\overline{u}|^2}{c^2}}}$

ummyndanir verða þá einfaldar

$$\tilde{u}_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\tilde{u}_0 - \beta\tilde{u}_1\right)$$

$$\tilde{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\tilde{u}_1 - \beta\tilde{u}_0\right)$$

$$\tilde{u}_2' = \tilde{u}_2$$

$$\tilde{u}_3' = \tilde{u}_3$$

því ef $\tilde{u} \equiv (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) \in \mathbb{R}^4$

þá gildir

$$\tilde{u}' = \Lambda(\alpha)\tilde{u}$$

sem er sama ummyndunin eins og fyrir x, x'

$\tilde{u}$: fjórhraði

x : fjórhnit

Skilgreinum; almennt gildir :

> ef fyrir hvert viðmiðunarkerfi (tregðukerfi) eru til $(a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv \tilde{a} \in \mathbb{R}$ og ummyndunin
>
> $$\tilde{a}' = \Lambda\tilde{a}$$
>
> gildi, þá er $\tilde{a}$ fjórvektor

þá gildir um sérhvern fjórvektor :

$$\boxed{a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \ *$$

því má skilgreina Minkowski innfeldi

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \equiv a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

og $*$ verður

$$\langle \tilde{a}', \tilde{a}' \rangle = \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle$$

sama gildi óháð kerfi

---

lítum á $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle$

fyrir gefið augnablik finnum kerfi S' með

$$\frac{dx_i'}{dt'} = 0 \ , \ i = 1,2,3$$

$$\longrightarrow \ \tilde{u}_i = \frac{dt'}{d\tau}\frac{dx_i'}{dt'} = 0 \ , \ i = 1,2,3$$

$$\tilde{u}_0 = \frac{dx_0'}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{|u'|^2}{c^2}}} = c$$

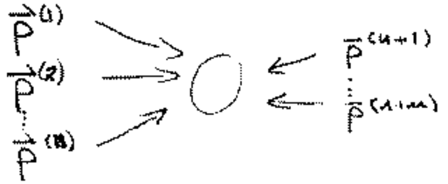
$$\longrightarrow \ \langle \tilde{u}', \tilde{u}' \rangle = c^2 \quad \rightarrow \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = c^2 \text{ í öllum kerfum}$$

Skriðþungi og Orka

Skilgreinum hugtök aflfræðinnar þ.a. hún samrýmist afstæðislögmáli Einsteins.

Alhæfum skriðþunga Newtons þ.a. hann sé varðveittur í öllum tregðuk.

athugum árekstur



$$\sum_{inn} \vec{p}^{(i)} = \sum_{út} \bar{p}^{(j)}$$

gildir hjá Newton ef

$$\vec{p} \equiv m_0 \frac{d\vec{x}}{dt}$$

og ef $(\bar{x}, t) \underset{\text{Galilei}}{\longrightarrow} (\bar{x}', t')$

$$\bar{x}' = \bar{x} - t\bar{v}$$
$$t' = t'$$

því hjá Galilei ummyndast $\bar{p}$ sem:

$$\bar{p}' = \bar{p} - m_0 \bar{v}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sum_{inn} \bar{p}_i' = \sum_{inn} \bar{p}_i - (\text{massi inn})\bar{v} \\ \sum_{út} \bar{p}_i' = \sum_{út} \bar{p}_i - (\text{massi út})\bar{v} \end{cases}$$

svo p er varðveittur í öllum kerfum ef hann er í einu.

Finnum réttan skriðþunga:

reynum:

$$\bar{p} = f\left(m_0, \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right|\right) \frac{d\bar{x}}{dt}$$

um f þarf að gilda:

1) f er óháð viðmiðunarkerfi
2) skriðþunginn er varðveittur í öllum tregðukerfum
3) $f(m_0, 0) = m_0$

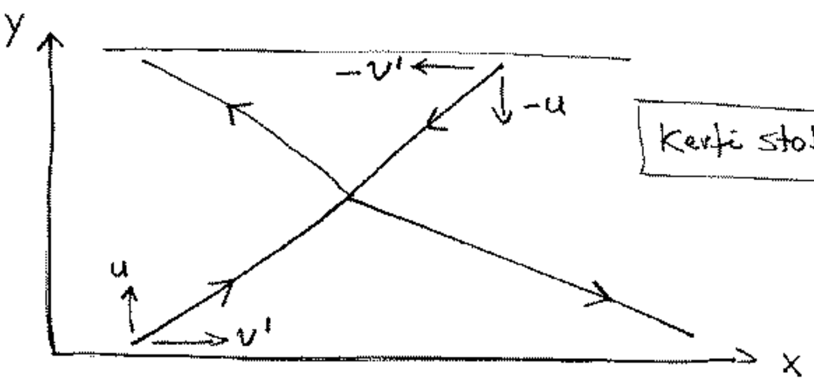
---

athugum fjaðurmagnaðan árekstur tveggja agna

Kerfi tilraunastofu

tveir kúlukastarar hreyfast með $\pm v$ á móti hvor öðrum í x

þeir henda kúlum með $\pm u$ í y-stefnu

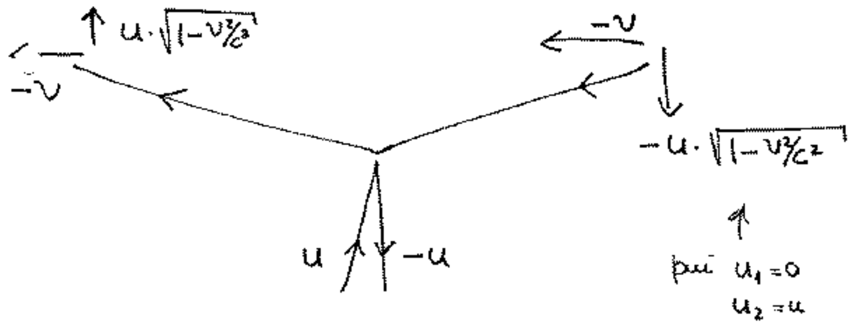


Kerfi stofu

hraði hvors miðað við hinn er þá

$$v = \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$

frá kerfi annars kastarans lítur áreksturinn þ. út:



---

gerum ráð fyrir að $u \ll c$, v ekki takmarkað

$$p_{inn} = m_0 u - f(m_0, v) \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot u$$

$$p_{út} = -m_0 u + f(m_0, v) \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot u$$

$\longrightarrow$ ef p varðveitist verður að gilda:

$$f(m_0, v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

þetta er oft kallað sem hreðaháður massi

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

og þá gildir

$$\bar{p} = m(v)\bar{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\bar{x}}{dt}$$

Einfaldara er að nota

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

$$\longrightarrow \quad \vec{p} = m_0 \frac{d\vec{x}}{d\tau} \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ <u>aðeins kyrrðarmassi er til</u> !

$$\boxed{\text{Getum athugað } \bar{p}\ (*) \text{ er varðveittur við alla árekstra í öllum tregðukerfum}}$$

hvernig ummyndast $\vec{p}$?

innleiðum einnig

$$p_0 \equiv m_0 \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

samkvæmt skilgreiningu á $\tilde{u}$

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = m_0(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$$

einnig fjórvektor $\quad \tilde{p} = m_0 \tilde{u} \in \mathbb{R}^4$

$$\tilde{p}' = \Lambda(\alpha)\tilde{p}$$

og þar sem $\quad \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = c^2$

$$\longrightarrow \quad \langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle = |p_0|^2 - |\bar{p}|^2 = m_0^2 c^2$$

óháð viðmiðunarkerfi

Skilgreinum

$$E \equiv c p_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

notum

$$\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle = |p_0|^2 - |\bar{p}|^2 = m_0^2 c^2$$

$$p_0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + |\bar{p}|^2}$$

til umritunar

$$E \equiv c p_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\bar{p}|^2}$$

taylor nálgun gefur þá: $v \ll c$, $|\bar{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{|\bar{p}|^2}{m_0^2 c^2}}$$

$$\simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\bar{p}|^2}{m_0^2 c^2} + \cdots\right.$$

$$\simeq m_0 c^2 + \underbrace{\frac{\bar{p}^2}{2 m_0}}_{\text{hefðbundin hreyfiorka}} + O\left(\frac{v^4}{c^2}\right)$$

nýr liður

Í afstæðiskenningunni er

E : orka

$E_0 = m_0 c^2$: hvíldarorka

$E_{kin} = E - m_0 c^2$: hreyfiorka

Setning

Ef skriðþungi er varðveittur í öllum tregðukerfum, þá er orkan E líka varðveitt

$$\sum_{inn} E^{(i)} = \sum_{út} E^{(j)}$$

Í stað E, athugum $p^0 = E/c$

$$P_0 \equiv \sum_{út} p_0^{(i)} - \sum_{inn} p_0^{(j)}$$

$$\bar{P} \equiv \sum_{út} \bar{p}^{(i)} - \sum_{inn} \bar{p}^{(j)}$$

Varðveisla merkir $\bar{P} = 0$ í öllum tregðukerfum

$(p_0, \bar{p})$ er fjórvektor

$$\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle = \langle \tilde{p}', \tilde{p}' \rangle \qquad \Lambda$$

$$= |p_0|^2 - |\bar{p}|^2 = |p_0'|^2 - |\bar{p}'|^2 \quad \longrightarrow \quad p_0 = 0$$

í öllum kerfum

E er varðveitt

E_{kin} þarf ekki að vera varðveitt

E_0 : hvíldarorkan getur umbreytst í hreyfiorku og öfugt