1

Rafsegulbylgjur

Á diffurformi eru jöfnur Maxwells

$$\bar\nabla\cdot\bar E = \frac{\rho}{\epsilon_0}\ , \quad \bar\nabla\cdot\bar B = 0$$

$$\bar\nabla\times\bar E = -\frac{\partial\bar B}{\partial t}\ , \quad \bar\nabla\times\bar B = \mu_0\left(\bar J + \epsilon_0\frac{\partial\bar E}{\partial t}\right)$$

Athugum hvað gerist í tómarúmi
(eða þar sem engar hleðslur eru
og engir straumar myndast)

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \bar\nabla\cdot\bar E = 0\ , & \bar\nabla\cdot\bar B = 0 & (2) \\ (3) & \bar\nabla\times\bar E = -\dfrac{\partial\bar B}{\partial t}\ , & \bar\nabla\times\bar B = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\bar E}{\partial t} & (4) \end{array}}$$

↑

lýsing á rafsegulsviði í tómarúmi!

2

$\bar\nabla\times$ (3)

$$\bar\nabla\times(\bar\nabla\times\bar E) + \frac{\partial}{\partial t}\bar\nabla\times\bar B = 0 \qquad (5)$$

Nú gildir um vigursvið $\bar A$ almennt

$$\bar\nabla\times(\bar\nabla\times\bar A) = \bar\nabla(\overset{\text{div}}{\bar\nabla\cdot\bar A}) - (\bar\nabla\cdot\overset{\text{grad}}{\bar\nabla})\bar A$$

$$(\bar\nabla\cdot\bar\nabla)\bar A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_x, A_y, A_z)$$

$$= \left\{\partial_x^2 A_x + \partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_z\ ,\ \partial_x^2 A_y + \partial_y^2 A_y + \partial_z^2 A_y\ ,\ \partial_x^2 A_z + \partial_y^2 A_z + \partial_z^2 A_z\right\} = \nabla^2\bar A$$

Nú gildir

$$\bar\nabla\times(\bar\nabla\times\bar E) = \underbrace{\bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar E)}_{=0} - \nabla^2\bar E = -\nabla^2\bar E$$

vegna (1) ⟶ 0

③

Notum þetta ásamt ④ í ⑤

$\rightarrow$

$$-\nabla^2 \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) = 0$$

eða

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0} \quad (6)$$

á svipaðan hátt fæst

$$\boxed{\nabla^2 \bar{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (7)$$

bylgjujöfnur fyrir vigrana $\bar{E}$ og $\bar{B}$
fyrir hvert hnit þeirra gildir
skalar bylgjujafnan

$$\nabla^2 \psi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t} = 0$$

$\psi = E_i$ eða B_i

④

Áður höfum við séð bylgjujöfnu

$$\nabla^2 \psi - 1/c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

þ.s. c er bylgjuhraðinn

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad \text{hér}$$

þegar gildin eru sett inn fyrir μ_0 og ϵ_0
sést að c er ljóshraðinn

Ljós er rafsegulbylgjur

Athugum lausnir ⑥ og ⑦

Fyrri reynsla $\rightarrow$ reyna lausnir
á forminu

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 \exp(+i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t))$$
$$\bar{B}(\bar{r}, t) = \bar{B}_0 \exp(i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t))$$

Innsetning í jöfnur 6 og 7 gefur skilyrði fyrir $\bar{k}$ og ω

Fyrst er greinilegt að

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\bar{E} &= -i\omega\bar{E} \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} &= i(\bar{k}\times\bar{E}) \end{aligned}\right\} (*)$$

og

$$\nabla^2\bar{E} = -k^2\bar{E}\ , \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{E} = -\omega^2\bar{E}$$

Því gefa bylgjujöfnur 6 og 7

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\bar{E} = 0$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\bar{B} = 0$$

(dispersión)
tvístursamband
(skýra)

$$\rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \rightarrow \boxed{\omega(k) = ck}$$

$\bar{k}$ er bylgjuvigur, ω er horntíðni

Maxwells jöfnurnar 1 – 4 með (*) gefa:

$$(3) \rightarrow \quad i(\bar{k}\times\bar{E}) = +i\omega\bar{B}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{1}{\omega}(\bar{k}\times\bar{E}) = \frac{1}{c}\hat{k}\times\bar{E}}$$

$\rightarrow$ $\bar{B}$ er $\perp$ á $\bar{E}$ og $\bar{k}$

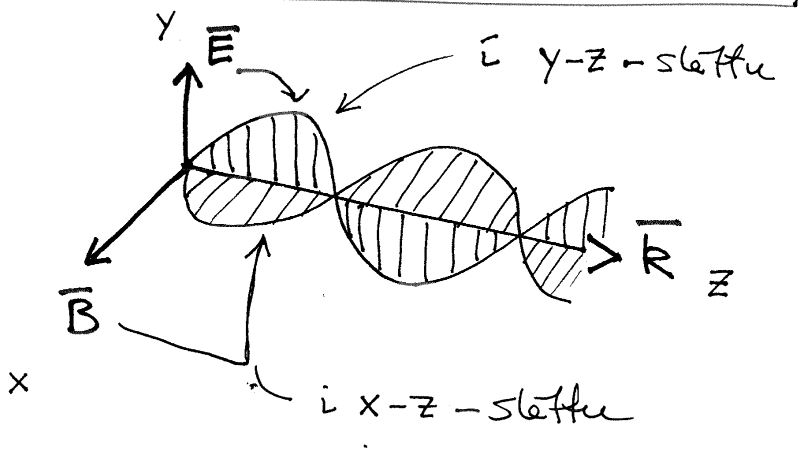
Bylgjan berst út í $\bar{k}$-stefnu

$$(4) \rightarrow \quad i\bar{k}\times\bar{B} = -\frac{1}{c^2}i\omega\bar{E}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{E} = -\frac{c^2}{\omega}\bar{k}\times\bar{B} = -c\hat{k}\times\bar{B}}$$

$\bar{E}$ er $\perp$ á $\bar{B}$ og $\bar{k}$

→ $\boxed{\bar{E} \text{ og } \bar{B} \text{ er } \perp \text{ á } \bar{k}}$



$\bar{E}_0$ og $\bar{B}_0$ eru valin þ.a. $\bar{E}$ er línulega skautað í y stefnu

Skautun getur verið margskonar

hringskautun, línuskautun, - - - -

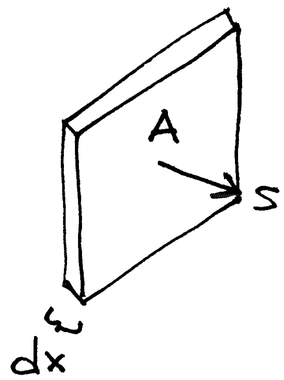
Orka í rafsegulbylgju

Orku -þéttleiki í

rafsviði : $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$

segulsviði : $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Athugum orkuna í rúmfrymi



Orkan í frymiu er

$$dU = (u_E + u_B)Adx$$

aðan sást að $E = cB$

og $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

$$dU = \left\{ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right\} A dx$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\mu_0 c^2} E(cB) + \frac{1}{2\mu_0} B\left(\frac{E}{c}\right) \right\} A dx$$

nú gildir $dt = dx/c$ $\left(c = \frac{dx}{dt} \right)$

$$\rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{\mu_0} EBA$$

<u>Orkuflæðið</u> á flatareiningu

$$\frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\mu_0} EB$$

því er skilgreindur Poynting-vigur

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$$

<u>lengd</u> hans er <u>orkuflæðið</u>

og stefnan er <u>stefna þess</u>

Eining orkuflæðis $\frac{J}{m^2 s}$

eða W/m^2

Í leiðandi efni breytist döfnunar liður við bylgjujöfnurnar þar sem orka tapast vegna hroðunar leiðslu og spans strauma í efninu.

↑ fyrir tími mynd þarf Skammtafr.