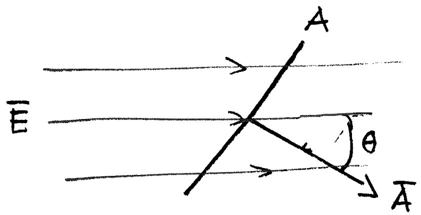
# 22. Lögmál Gauß

## Rafflæði

Í einsleitu sviði $\bar{E}$ er rafflæðið $\Phi_E$ um flöt A skilgreint sem

$$\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{A}$$




þversvið

þ.s. $\bar{A}$ er vigur þvert á flötinn A og flatarmál$(A) = |\bar{A}|$

{ hér völdum við normalinn í þá stefnu sem við skilgreinum rafflæðið í }

Í misleitu sviði eða ef flöturinn A er ekki valinn sléttur er hægt að nálga A með smáum flötum $\Delta A_i$



þ.a. rafsviðið um hvern þeirra sé næstum fast $\bar{E}_i$

$$\Phi_E \approx \sum_i \bar{E}_i \cdot \Delta \bar{A}_i$$

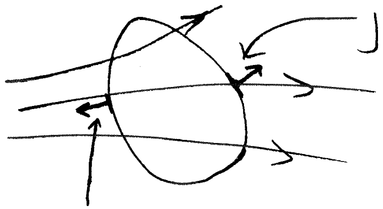
$$\xrightarrow[\Delta A \to 0]{} \int \bar{E} \cdot d\bar{A} = \Phi_E$$

yfirborðs-heildi

Lögmál Gauß segir að nettó rafflæðið um lokað yfirborð sé í réttu hlutfalli við hleðsluna innan þess:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

* Bein afleiðing af lögmáli Coulombs. Fyrir annan veldisvísi en $-2$ er það ekki til.
* Lítum á $\bar{E}$ sem heildarsviðið vegna allra hleðslna, ekki aðeins þeirra innan yfirborðsins.



jákvætt flæði

neikvætt flæði

flæðið vegna hleðslunnar styttist út!

utan yfirborðs

→ þó $Q=0$ er ekki hægt að gera ráð fyrir að $\bar{E}=0$ allstaðar á yfirborðinu.

---

| |
|---|
| Gauß lögmál er þægilegt til að reikna rafsvið fyrir hleðsludreifingar með háa samhverfu |

sést best fyrir eina punkt hleðslu

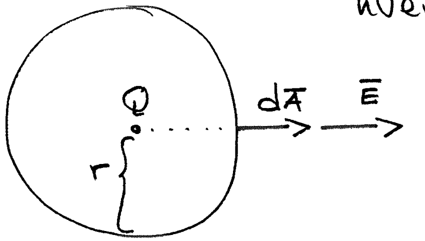
kúlusamhverfa

→ Gauß-yfirborð kúla

leysum $\oint \bar{E}\cdot d\bar{A}$



rafsviðið á yfirborðinu vegna Q er fast og samhliða $d\bar{A}$ í hverjum punkti




$$\rightarrow \oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = E\oint dA = E(4\pi r^2)$$

A

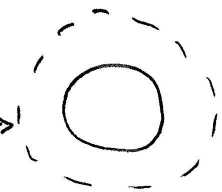
Gauß → $E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$ → $\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$

---

Kúluskel með geisla R og hleðslu Q

a) utan skeljar $r > R$

kúlusamhverfa →



allir punktar jafngildir →

vegna Q

E hefur fastan styrk á yfirborðinu og getur bara verið þvert á það

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(5)

$$\rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

sama og fyrir punkthleðslu (Newton)

b) innan skeljar $\underline{r < R}$

sama samhverfa (fyrir E vegna Q)

$$E(4\pi r^2) = 0$$

rafsviðið frá kúlulaga skel er núll innan hennar

---

<u>Kúla með einsleita hleðsludreifi.</u> $R, Q$ $\quad \rho\ [C/m^3]$

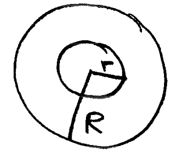
- Utan kúlunnar gerist það sama og fyrir skelina

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

á Gauß-kúluyfirborði með $r > R$
(E er vegna Q)

(6)

<u>innan kúlu</u> $r < R$




kúlusamhverfa
↳ Gauß-yfirborð

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

$Q'$ er hleðslan innan kúluyfirb. með geisla $r$

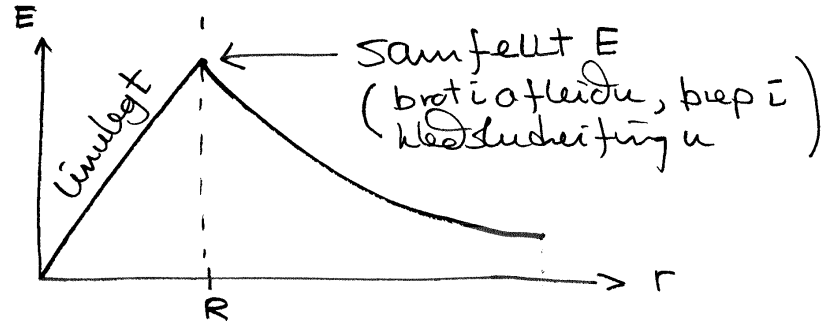
$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$Q' = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{3Q}{4\pi R^3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

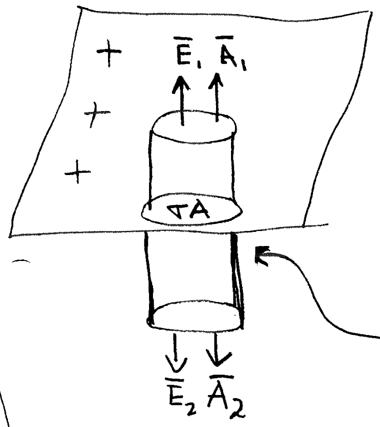
$$\rightarrow \quad E = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



(7)

## Óendanleg hleðin slétta $\sigma$ [C/m²]

→ Samhverfa: allir punktar sitthvoru megin sléttu jafngildir




→ sviðslínur hornréttar á sléttu, $\bar{E}$ einsleitt sitthvoru megin

ekkert flæði vegna $\sigma$ um bogna flötinn

| |
|---|
| hleðslan utan Gauß-flatar veldur því að sviðslínur eru beinar. |

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \underbrace{E_1A_1 + E_2A_2}_{2EA} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\rightsquigarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(8)

## Leiðarar (mjög mikilvægt)

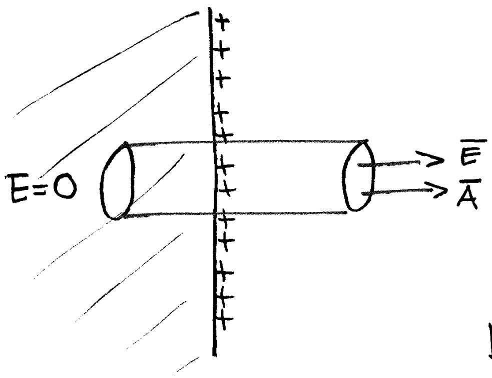
Jafnvægi (rafstöðufræði)

↳ $\bar{E} = 0$ innan leiðara

→ Lögmál Gauß segir að nettó hleðsla innan leiðara sé núll

| |
|---|
| nettó hleðsla leiðara verður að vera á yfirborði hans ! |

- leiðari með endanlega þykkt (mætti vera hálfrúm!) og yfirborðshleðslu (ræða aðeins tengsl við rennuvel. kafli)



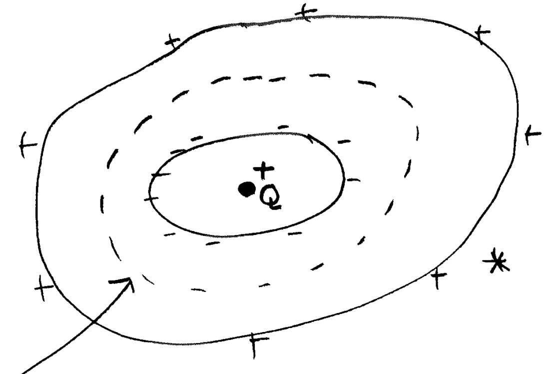

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

bera saman við hleðslusléttu!

# Hol í leiðara

## Hleðsla inni í holi leiðara



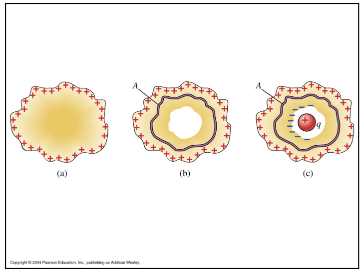

Gauß yfirborð

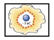
* $\bar{E}=0$ innan leiðara

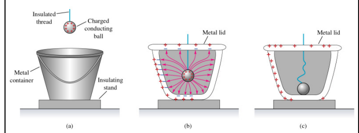
$\downarrow$

* spönuð hleðsla $-Q$ á holyfirborðinu

Ef leiðarinn er í heild óhlaðinn þá verður að spanast $+Q$ á yfirborð hans !







Insulated thread
Charged conducting ball
Metal container
Insulating stand
Metal lid
Metal lid
(a)
(b)
(c)