1

Dæmi 1

Hreyfingu agnar er lýst þannig að $v(x) = v_0 \exp(-\beta x)$ og $v(x=0) = v_0$ þegar $t = 0$.

a)

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\beta x} \rightarrow \frac{dx}{e^{-\beta x}} = e^{\beta x}\,dx = v_0 dt$$

Notum ákveðna heildun

$$\int_0^x e^{\beta x'}dx' = v_0 \int_0^t dt'$$ þar sem upphafsskilyrðin eru notuð

$$\rightarrow \left.\frac{e^{\beta x'}}{\beta}\right|_0^x = v_0 t \rightarrow \left[e^{\beta x} - 1\right]\frac{1}{\beta} = v_0 t \rightarrow e^{\beta x} - 1 = \beta v_0 t$$

$$\rightarrow e^{\beta x} = 1 + \beta v_0 t \rightarrow \beta x = \ln\left\{1 + \beta v_0 t\right\}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[1 + \beta v_0 t\right] \rightarrow \boxed{v(x(t)) = v_0 e^{-\beta x(t)} = \frac{v_0}{1 + \beta v_0 t}}$$

sjáum að $v(t=0) = v_0$ og $v(x=0) = v_0$

2

b)

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx}$$

Vitum frá fyrri lið

$$\frac{dv}{dx} = -\beta v_0 e^{-\beta x} = -\beta v \rightarrow F = -m\beta v^2$$

$$\rightarrow \boxed{F(t) = -m\beta \frac{v_0^2}{(1 + \beta v_0 t)^2}}$$

c) Hér að ofan sást að

$$\boxed{F = -m\beta v^2 = -m\beta v_0^2 e^{-2\beta x}}$$

3

Dæmi 2

Ögn með massa m ferðast í einvídd í efni með núningskrafti $f = -mk(v^3 + \beta v)$, $v(t=0) = v_0$

Því er hreyfijafnan

$$m\frac{dv}{dt} = -mk\left\{v^3 + \beta v\right\} \rightarrow \frac{dv}{v^3 + \beta v} = -k\,dt$$

Heildum ákveðið

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^3 + \beta v} = -k\int_0^t dt' = -kt$$

$$\rightarrow \left.\left[\frac{1}{\beta}\ln(v) - \frac{1}{2\beta}\ln(v^2 + \beta)\right]\right|_{v_0}^{v(t)} = -kt$$

4

$$\rightarrow \ln\left\{\frac{v(t)}{\sqrt{v^2(t) + \beta}}\right\} - \ln\left\{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \beta}}\right\} = -kt$$

$$\rightarrow \frac{v(t)}{v_0}\frac{\sqrt{v_0^2 + \beta}}{\sqrt{v^2(t) + \beta}} = e^{-\beta k t}$$

$$\rightarrow \frac{v^2(t)}{v^2(t) + \beta} = e^{-2\beta k t}\frac{v_0^2}{v_0^2 + \beta}$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = \sqrt{\frac{v_0^2 \beta}{(v_0^2 + \beta)e^{2\beta k t} - v_0^2}}}$$

$v(t \rightarrow \infty) = 0$

5

Hversu langt kemst ögnin?

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{\sqrt{v_0^2\beta}}{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t} - v_0^2}}$$

Ef $x(0) = 0$

$$x = \int_0^t \frac{\sqrt{v_0^2\beta}\,dt'}{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t'} - v_0^2}}$$

Notum (GR:2.315)

$$\boxed{x(t) = \frac{2\sqrt{v_0^2\beta}}{2\beta k v_0}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t}-v_0^2}}{v_0}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\beta}}{v_0}\right)\right]}$$

6

þegar $t \to \infty$ stefnir arctan á $\pi/2$

$$\longrightarrow \boxed{x(t\to\infty) = \frac{1}{k\sqrt{\beta}}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{v_0}}\right)\right]}$$

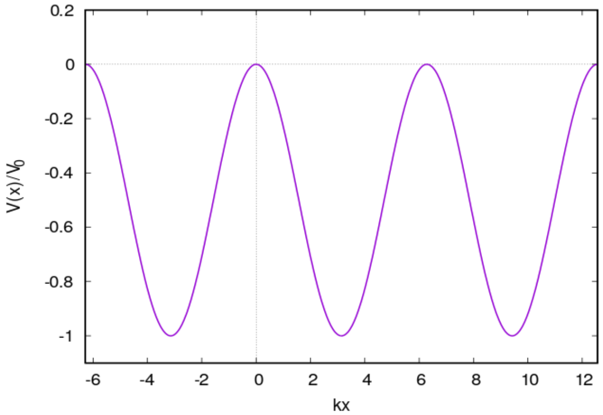
því sést að

$$x(t\to\infty) \leqslant \frac{\pi}{2k\sqrt{\beta}}$$

fyrir hvaða upphafshraða v_0 sem er

Dæmi 3 $\quad U(x) = -U_0\sin^2(kx/2), \quad k = 2\pi/L$

a)



Lotubundið mætti
orka agnarinnar > -Vo

b) Hreyfingin verður staðbundin sveifla, þ.e. lotubundin. Því er náttúrulegur tími kerfisins sveiflutíminn τ

8

c) Notum heildarorkuna

$$E = T + U = \frac{m}{2}v^2 - U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{m}{2}v^2 = E + U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)$$

Fyrir mesta útslag sveiflunnar x_0 gildir að E sé einungis stöðuorkan

$$\longrightarrow E = -U_0\sin\left(\frac{kx_0}{2}\right), \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\longrightarrow \tau = 4\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{kx_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}}$$

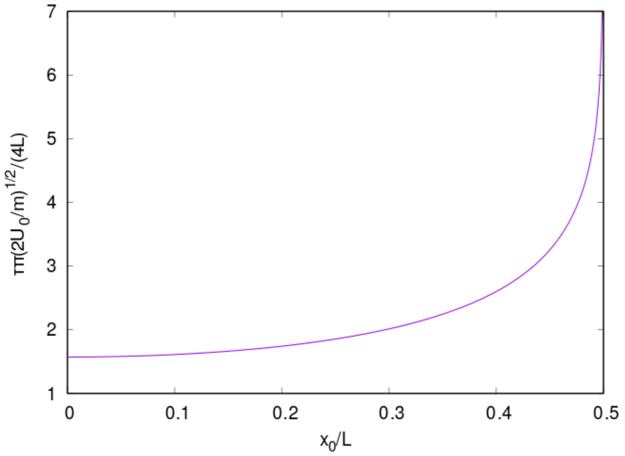
Notum heildi á s. 15 og 16 í 5. fyrirlestri

$$= \frac{4}{k}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{z_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}} = \frac{8L}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}K\left(\sin\left(\frac{z_0}{2}\right)\right)$$

9

$$\tau = \frac{4L}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\, K\left(\sin\left(\frac{\pi x_0}{L}\right)\right)$$

K er fyrsta fullkomna sporbaugsheildið (fyrst complete elliptic integral), það er til í gnuplot



Þegar útslagið nálgast hæsta gildið lengist tíminn án takmarka

Sjáum síðar skildleikann við ólínulegan pendúl

10

Dæmi 4

$$v(x) = v_0\left[\tanh\left(\frac{x}{a}\right)+1\right], \quad a>0$$

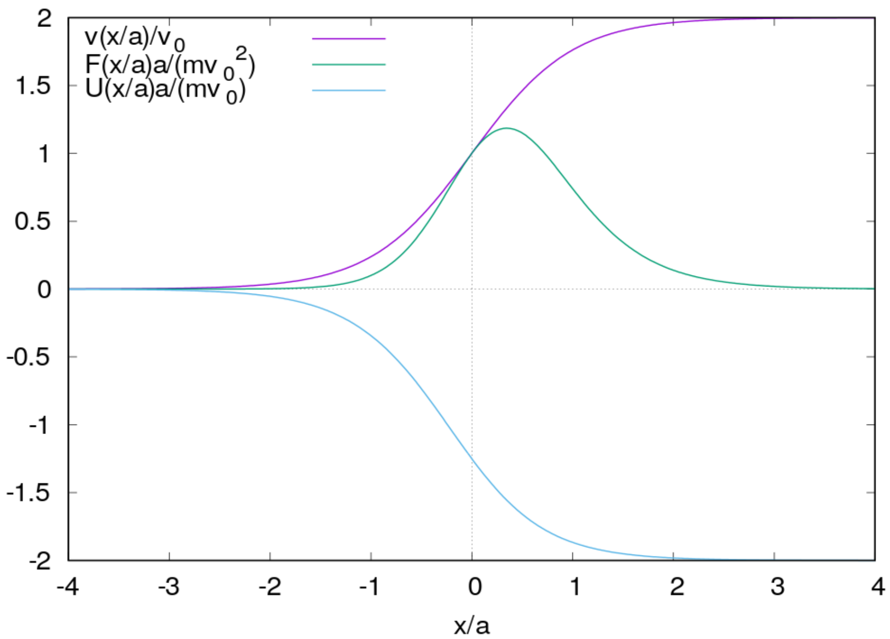
$$F = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = mv_0\left[\tanh\left(\frac{x}{a}\right)+1\right]\frac{v_0}{a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$U(x) = -\int_{-\infty}^{x} dx'\, F(x')$$

$$= -\frac{mv_0}{a}\left[\frac{2a}{e^{-\frac{2x}{a}}+1} - \frac{a}{2\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$= mv_0\left[\frac{1}{2\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2}{e^{-\frac{2x}{a}}+1}\right]$$

11



12

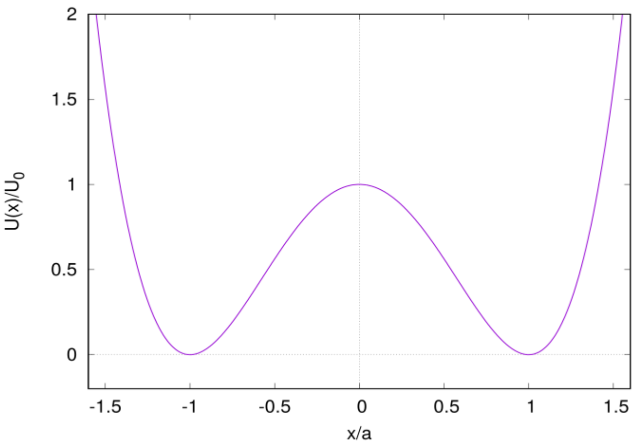
Þannig að ögnin gæti komið langt að með "föstum" hraða og orðið fyrir krafti á takmörkuðu svæði sem eykur ferð hennar í kringum $x/a = 0$ síðan kemst hún aftur á "fasta" ferð.

Þessu er einnig hægt að lýsa með "mættisþrepinu" sem hún fer fram af í kringum $x/a = 0$. Lengdin a er náttúrulegu lengdarskali sem ákveður seilni mættisins og kraftsins.

Dæmi 1

1

Ögn hreyfist í mættinu $U(x) = U_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$, $a > 0$



$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 4\left(\frac{U_0}{a^2}\right)\left[3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} U'(\pm 1) = 0, \quad U''(\pm 1) > 0, \\ U'(0) = 0, \quad U''(0) < 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$x/a = \pm 1$ eru jafnvægisp.
$x/a = 0$ er óstöðugur jafnvægispunktur

2

b) Smáar sveiflur um jafnvægispunktana

Þurfum að kanna $U(x \pm \epsilon)$ fyrir $x = \pm a$

Liðum

$$U(\pm a \pm \epsilon) \approx 4U_0\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^2 + \cdots$$

Í kringum $x = \pm a$ er mættið fleygbogi, á þeim slóðum er því orka kerfisins

$$E_T \approx \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{4U_0}{a^2}x^2$$

Fyrir hreintóna sveifil með grunntíðni ω er orkan

$$E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Þess vegna er grunntíðni smárra sveiflna okkar kerfis um $x = \pm a$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{8U_0}{ma^2}}} \quad \text{því} \quad \frac{4U_0}{a^2} = \frac{1}{2}m\Omega^2$$

3

c) Einföldum okkur þetta með því að hugsa um ögn í kyrrstöðu sem sett er í mættið $U(x)$ á mismunandi stöðum x. Fyrsta afleiðan af $U(x)$, krafturinn á ögnina í x, er alltaf að einhverjum jafnvægispunkti, ef hún er ekki í jafnvægispunkti. Undantekningin er í punktinum $x = 0$, þar verkar enginn kraftur á ögnina og hún er ekki í stöðugum jafnvægispunkti. Lítil hnikun staðsetningar kæmi henni af stað í jafnvægispunkt, en í $x = 0$ verkar enginn kraftur á hana.

Þetta segir ekki að ferill agnarinnar í jafnvægispunktinn verði einfaldur. Hann mætti reikna með tölulegri lausn á hreyfijöfnunni fyrir mismunandi upphafsskilyrði. Munum að kerfið er ólínulegt og því er eins víst að við sjáum lausnina ekki fyrir án reikninga.

Dæmi 2

4

Skoðum hreyfingu agnar í mættinu $U(x) = qE|x|$, þar sem qE eru jákvæðir fastar. Greinilega má búast við sveifluhreyfingu þar sem krafturinn á ögnina er alltaf að $x = 0$ punktinum. Um mættið er ekki fjallað venjulega þar sem það kemur ekki fyrir í náttúrunni vegna hegðunar þess í $x = 0$, en það er þó til fyrir hálfan x-ásinn (þyngdar- eða rafkraftur, og í manngerðum hálfleiðurum má nálga það vel fyrir já- og neikvæð x).

Því er best að nota

$$\tau = \pm 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_T - U(x)\right)}}, \quad E_T \text{ er heildarorka agnarinnar}$$

Þó vissulega megi nota kunnáttuna úr E-1 til að finna lotuna.

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(qEx_0 - qEx)}}, \quad E_T = qEx_0$$

$$= 4\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}(x_0-x)}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x_0-x}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\,\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{4\sqrt{x_0}}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\left[-2\sqrt{1-u}\,\Big|_0^1\right]$$

$$= 8\sqrt{\frac{x_0 m}{2Eq}}$$

Sveiflutíminn er háður útslagi sveiflunar, sem væri ekki fyrir hreintóna sveifil

(ef $qE = mg$ fæst, $\tau = 8\sqrt{\frac{x_0}{2g}}$)

Dæmi 3 Finnið ferla agnar með masa m í fasarúminu sem hreyfist í mættinu $U(x) = qE|x|$

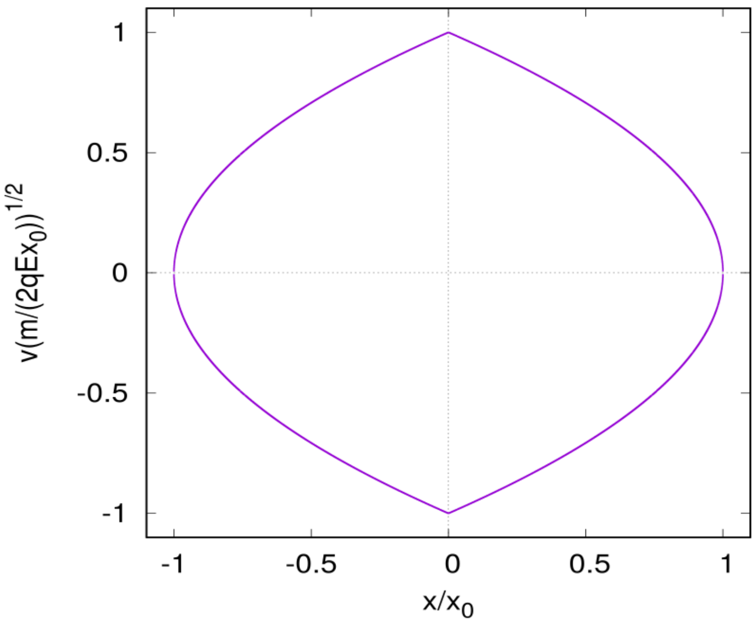
Heildarorkan

$$E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + qE|x|, \quad E_T = qEx_0$$

$$\rightarrow \frac{E_T}{qEx_0} = \frac{m}{2qEx_0}\dot{x}^2 + \left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{m}{2qEx_0}}\,\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{E_T}{qEx_0} - \left|\frac{x}{x_0}\right|} = \pm\sqrt{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}$$

Ferillinn í fasarúminu er því



Dæmi 4 Finnið tvær mismunandi leiðir til að finna röð Fouriers fyrir fallið $\sin^2(x/2)$ skilgreint á bilinu $[0:2\pi]$

Samkvæmt skilgreiningu:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\cos(n\omega t')$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\sin(n\omega t')$$

(9)

$F(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $\tau \to 2\pi$, $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx \, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin(2\pi n)}{2n(n^2-1)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ef } n=0 \\ -1/2 & \text{ef } n=1 \\ 0 & \text{fyrir } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx \, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(2\pi n)-1}{2n(n^2-1)} = 0$$

(10)

Styttri leið

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$\to \begin{cases} a_0 = 1 \quad \text{og} \quad a_1 = -\frac{1}{2} \\ b_n = 0 \quad \text{og} \quad a_n = 0 \text{ fyrir } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

munum að $F(x) = \frac{a_0}{2} + \cdots$

1

Dæmi 1

Ögn hreyfist í mættinu $U(x) = U_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$

Könnum ferla hennar í fasarúminu $(x,\dot{x})$

Heildarorka hennar er $E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U_0\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2$

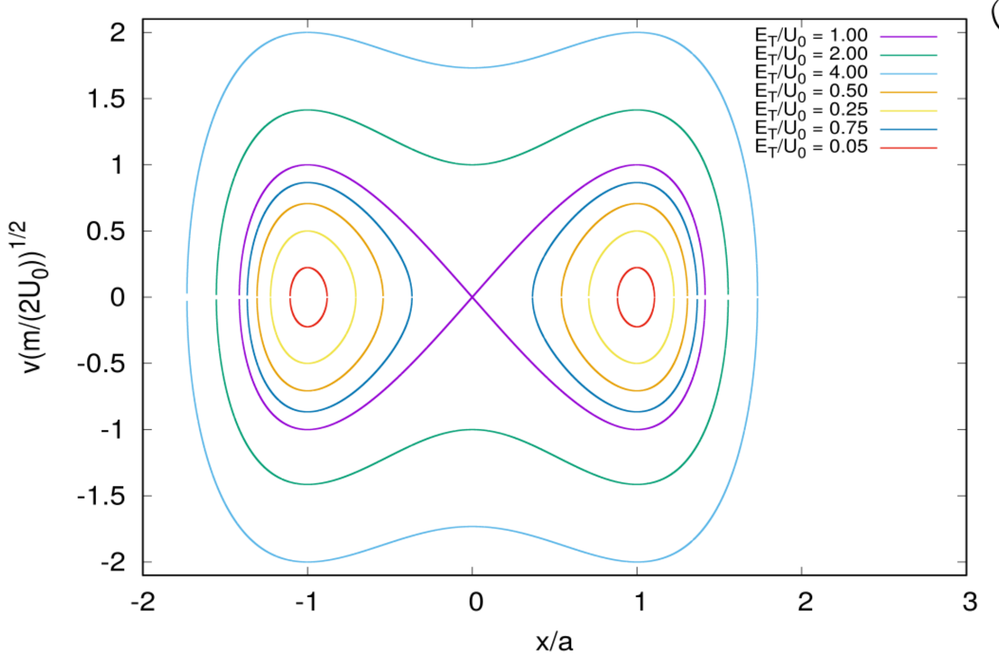
$$\rightarrow \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 = E_T - U_0\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{E_T}{U_0} - \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2}$$

Því er eðlilegast að nota víddarlausu breyturnar x/a og $\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\dot{x}$

og hlutfallið E_T/U_0 gefur heildarorkuna m.v. U_0

2



3

Dæmi 2

Ólínulegur sveifill með víddarlausa hreyfijöfnu

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$$

Notum hér greinireikning til að kanna eiginleika ferla hennar í fasarúminu $(x,\dot{x})$ en í næsta dæmi verða notaðar tölulegar aðferðir til að reikna þá.

Notum pólhnit, en breytum hreyfijöfnunni fyrst í hneppi fyrstastigs jafna

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -y^3 - x \end{cases}$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \qquad (**)$$

4

$$r^2\dot{\theta} \overset{(**)}{=} x\dot{y} - y\dot{x} \overset{\text{hneppi}}{=} -x(y^3 + x) - y^2$$

$$= -r^4\cos\theta\sin^3\theta - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = -\left[r^2\cos\theta\sin^3\theta + 1\right]}$$

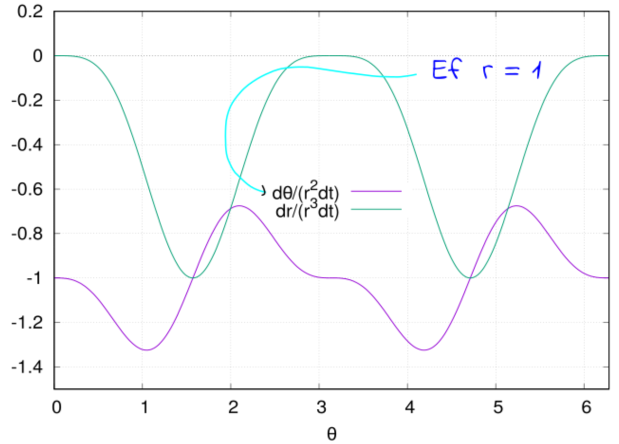
og með (*) fæst

$$r\dot{r} = xy + y(-y^3 - x) = -y^4 = -r^4\sin^4\theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot{r} = -r^3\sin^4\theta}$$

skoðum eiginleika þessara falla á næstu síðu

5



Hér sést að

$\dot{\theta} < 0$

hringsnúningur agnarinnar í fasarúminu er því alltaf réttsælis.

Eins sést að

$\dot{r} < 0$

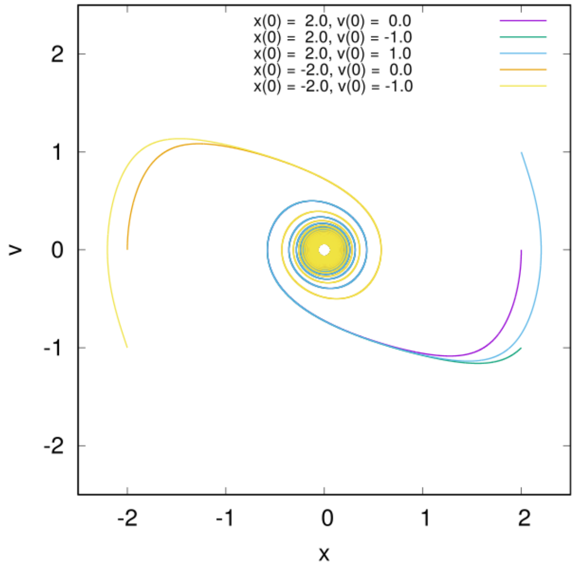
(nema í punktum sem eru heilt margfeldi af π)

Ögnin mun því nálgast (0,0)-punktinn, en mjög hægt þar sem deyfingin í réttu hlutfalli við v^3 er mjög smá fyrir lítinn hraða.
Ég sé enga takmörkun fyrir r, sjáum myndir í næsta dæmi.

6

Dæmi 3 Beytum tölulegum aðferðum fyrir dæmi 2. Hreyfijafnan er með víddarlausum stærðum $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$

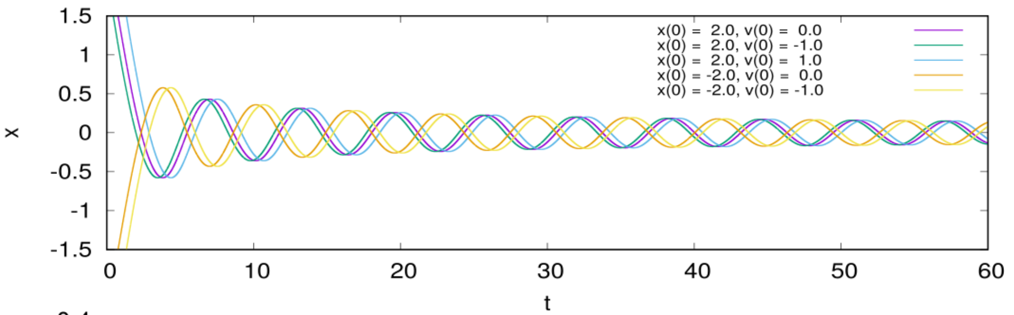
Ferlar í fasarúmi

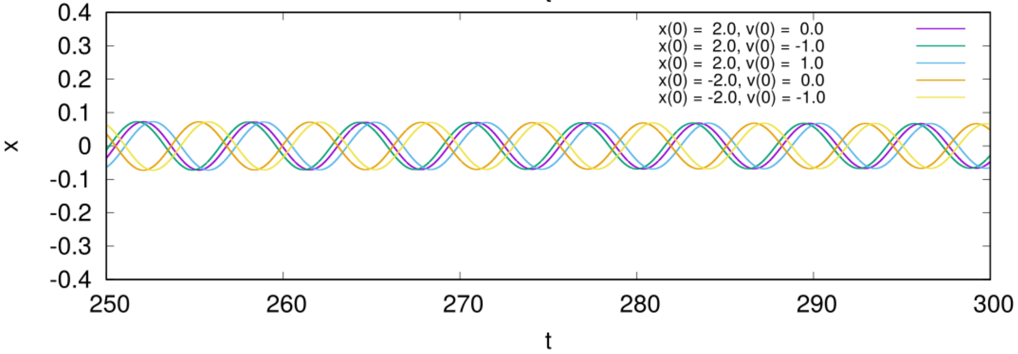


Hér sést réttsælis snúningurinn og hversu hægist á deyfingunni með minnkandi hraða

7

Eftirfarandi myndir sýna vel hvernig deyfingin minnkar með v og t





8

Dæmi 4 Athugum fasarúmsferla fyrir ögn í $U(x) = U_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]$$

Bætum við viðnámskrafti

$$f(\dot{x}) = -mb\dot{x}$$

svo hreyfijafnan verður

$$m\ddot{x} + mb\dot{x} + 4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right] = 0$$

veljum skölun $x/a = z$, $t\Omega = s$, $\Omega^2 = \frac{4U_0}{ma^2}$

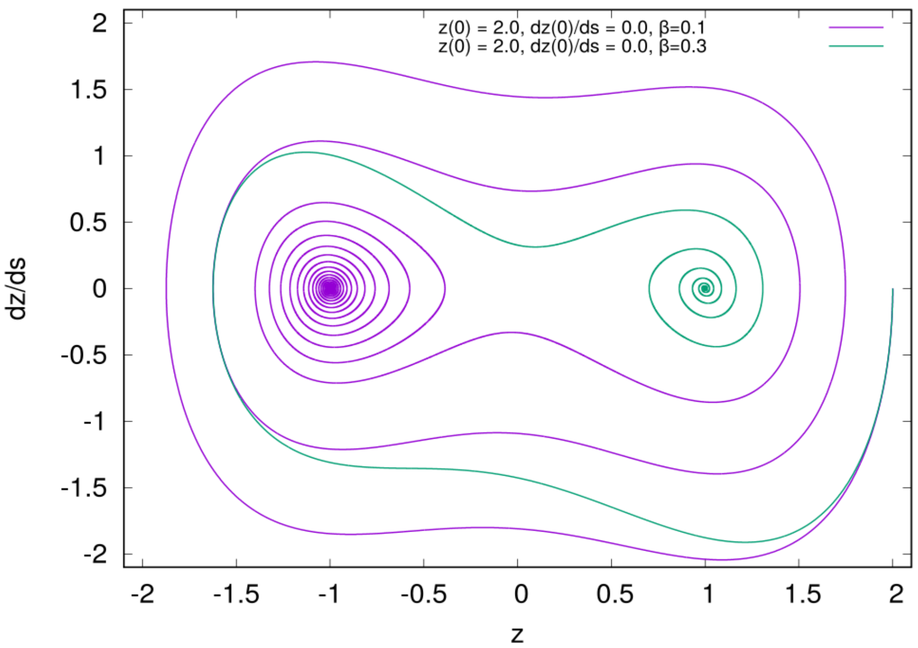
$$\rightarrow \boxed{z'' + \frac{b}{\Omega} z' + z(z^2 - 1) = 0}$$

$z(s)$, $\frac{b}{\Omega}$

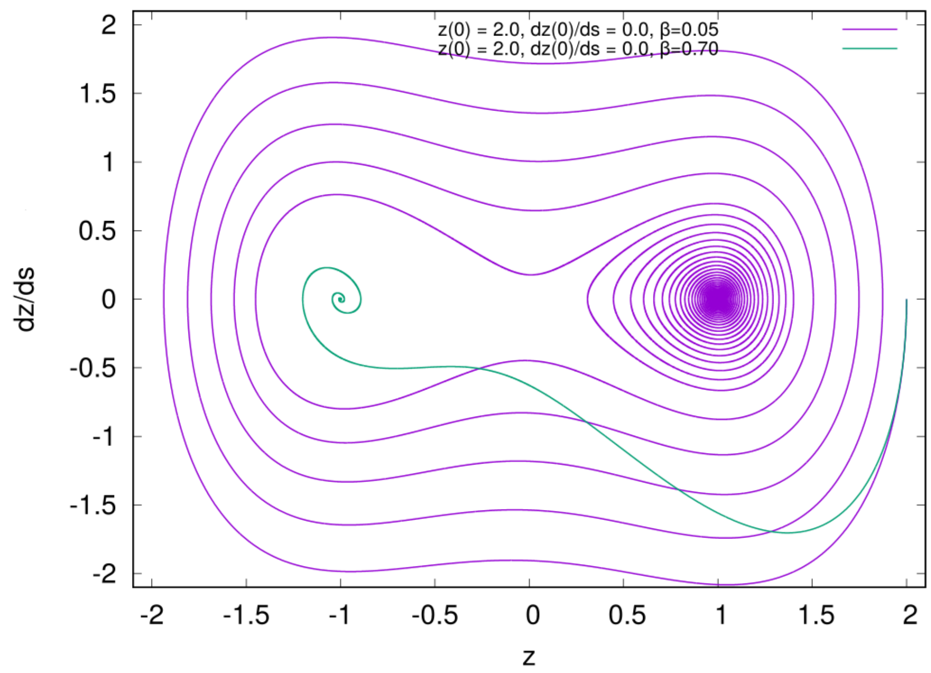
eini fastinn eftir

Skoðum 4 mismunandi tilfelli með $\dot{z}(0) = 0$

(a)



(b)



1

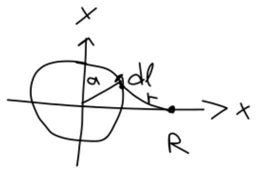
Dæmi 1 Hugsum okkur þunnan hring með geisla a og massa M sem liggur í x-y-sléttunni með miðju í miðju hnitakerfinu.

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\phi}} = -\frac{GM}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{R}\right)^2-\frac{2a}{R}\cos\phi}}$$

$$= -\frac{GM}{R}\,\frac{4}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\,K\left(\frac{\sqrt{2\left|\frac{a}{R}\right|}}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right), \quad |R|\neq a$$

Höfum notað

$$d\Phi = -G\frac{dM}{r}, \quad r=\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\phi}, \quad d\Phi = -G\rho_\ell\frac{d\ell}{r}$$



$$\rho_\ell = \frac{M}{2\pi a}$$

$$d\ell = a\,d\phi$$

2

2015 var heildið liðað fyrir R/a >> 1

$$\Phi(R) \simeq -\frac{GM}{R}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2+\dots\right] \simeq -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right]$$

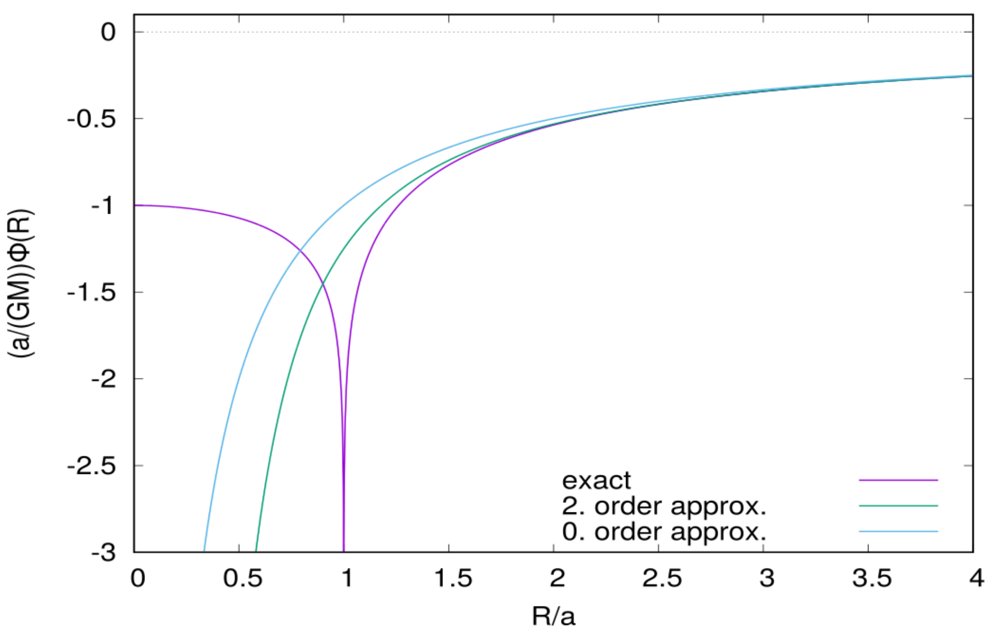
$$\simeq \begin{cases} -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right) & \text{0.-stigs nálgun} \\ -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right] & \text{2.-stigs nálgun} \end{cases}$$

Nákvæm lausn, sambærilega sköluð

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{a}\,\frac{4}{\frac{R}{a}\left|1+\frac{a}{R}\right|}\,K\left(\frac{\sqrt{2\left|\frac{a}{R}\right|}}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right) \quad |R|\neq a$$

3

Gröfum upp og berum saman



4

Á grafinu sést að í miðju hringsins er $\Phi(R) = -GM/a$, enda er núllpunktur þess festur fyrir $R \to \infty$.
Mættið er ekki fast innan hringsins, og það er með sérstöðupunkt fyrir $R = a$.

Dæmi 2

Við skoðum kúlu með geisla a og massadreifingu ρ sem er ekki háð hornunum í kúluhnitum. Þyngdarsviðið innan kúlunnar er óháð geislanum r. Hvernig verður massadreifingin $\rho(r)$ að vera svo það standist?

Um þyngdarsviðið $\bar{g}$ gildir

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{g} = -4\pi G\rho$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{g} = 0$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 g_r\right) = -4\pi G\rho(r)$$

$$\longrightarrow \frac{2}{r^2}\,r\,g_r = -4\pi G\rho$$

$$\longrightarrow \boxed{\rho = \frac{-g_r}{2\pi r G}}$$

þar sem g_r er fasti, $g_r < 0$ stefnir að miðju

Dæmi 3 Yfirborði er lýst með jöfnunni $z = (x^2)/2$. Finnið skemmstu leiðina milli punktanna (0,0,0) og (1,1,1/2). Teiknið upp ferilinn í x-y-sléttunni og berið saman við beina línu

5

Fjarlægðin er

$$S = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2} \qquad \text{þ.s.} \quad \frac{dz}{dx} = x$$

$$= \int_{P_0}^{P_1} dx\, f(y(x), y'(x); x) \overset{\text{hér}}{=} \int_{P_0}^{P_1} dx\, f(y'(x); x)$$

6

Jafna Euler og Lagrange er því

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \quad f(y'; x) = \sqrt{1 + (y')^2 + x^2}$$

$$\to \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \to \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}}$$

$$\to \boxed{\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}}\right\} = 0}$$

Við erum að finna y(x) sem gefur útgildi (vonandi lágmark) fyrir lengdina S. Afleiðujafnan í bláa rammanum ákvarðar fallið þegar hún er leyst með jaðarskilyrðunum um að ferlinn liggi um punktana tvo.

7

$$\to \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}} = \text{fasti} = a$$

$$\to \frac{(y')^2}{1 + (y')^2 + x^2} = a^2 \to (y')^2 = a^2\left[1 + (y')^2 + x^2\right]$$

$$\to (y')^2\left[1 - a^2\right] = a^2\left[1 + x^2\right]$$

$$\to \boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\sqrt{1 + x^2}}$$

8

Þurfum því að heilda

$$dy = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

$$\to y(x) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\left\{\frac{\mathrm{ArSinh}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}\right\} + C$$

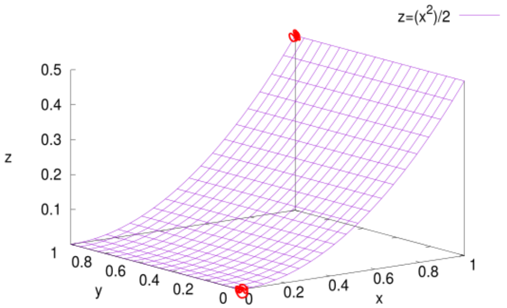
$$y(0) = 0 \to C = 0$$

$$y(1) = 1 \to \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\left\{\frac{\mathrm{ArSinh}(1)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = 1$$

$$\to \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2}{\mathrm{ArSinh}(1) + \sqrt{2}}$$

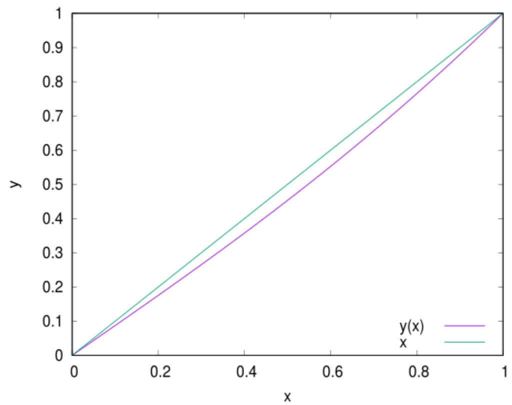
9

Skoðum aðeins grafík, á yfirborðinu



vildum við finna stysta ferilinn milli horn-punktanna (0,0,0) og (1,1,1/2)

Fundum y(x) þannig að í grunnsléttunni (x-y-sléttunni er hann



greinilega nærri beinni línu í grunn-fletinum, en ekki alveg. Það væri gaman að teikna ferilinn upp í yfirborðinu

10

Dæmi 4 Athugum útgildi

$$J[y] = \int_0^1 dx\, F(y, y'; x)$$

með

$$f(y,y';x) = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{4}y^4$$

Jafna Eulers og Lagrange

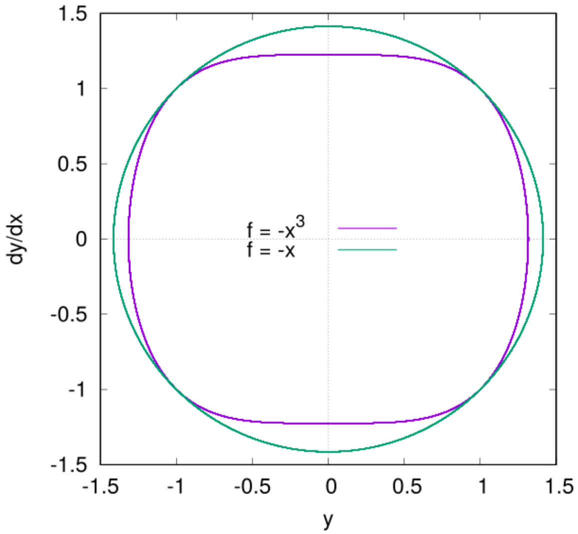
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad -y^3 - \frac{d}{dx}y' = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y'' + y^3 = 0}$$

Ólínuleg jafna, sem erfitt er að leysa með greinireikningi, en mjög þægileg fyrir FORTRAN forritið okkar. Berum lausnina saman við lausn línulegur jöfnunar $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

11

Lausnirnar erum best bornar saman á "fasarúmsriti"



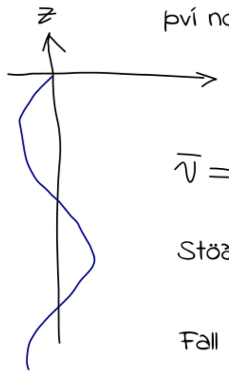
Ef við leyfum okkar túlka x sem tíma, þá er línulega kerfið hrein-tóna sveifill og ólínulega kerfið er sveifill sem verður stífari fyrir stórt útslag. Þetta sést vel á myndinni.

Fallið f má því túlka sem fall lagrange fyrir kerfið, og J er virknifallið.

1

Dæmi 1 Fall eftir braut með $x = a\sin(kz)$

því notum við skorðufall $G(x,z) = x - a\sin(kz) = 0$



þyngdarkraftur $f_z = -mg$

$$\bar{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{z}\hat{e}_z \;\to\; v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$$

Stöðuorka $U = mgz$

Fall Lagrange $\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right] - mgz}$

Reynum fyrst aðferð án margfaldara Lagrange, umskrifum fall Lagrange:

$L(\dot{x}, \dot{z}, z) \longrightarrow L(z, \dot{z})$ með G, sem tengir z og x

2

$$\to L = \frac{m}{2}\left[\left(ka\cos(kz)\cdot\dot{z}\right)^2 + \dot{z}^2\right] - mgz$$

$$= \frac{m}{2}\dot{z}^2\left\{1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right\} - mgz = L(z, \dot{z})$$

Nota jöfnu E-L til að finna hreyfijöfnu

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \;\to\; -mg - \frac{m}{2}\dot{z}^2 k (ka)^2 2\sin(kz)\cos(kz)$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{m\dot{z}\left[1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right]\right\} = 0$$

$$\to -g - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz) - \ddot{z}\left\{1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right\}$$

$$+\dot{z}k(ka)^2 2\sin(kz)\cos(kz)\cdot\dot{z} = 0$$

3

$$\ddot{z}\left\{1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right\} - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz) + g = 0$$

$$\to \boxed{\ddot{z} + \frac{g - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz)}{\left[1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right]} = 0}$$

Greinilega ólínuleg jafna og ólínuleikinn stýrist að stikanum (ka). Jafnan yrði línuleg ef þessi stiki væri settur á 0, það er ef rétt væri úr brautinni!

Notum margfaldara Lagrange

$$\to \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \lambda\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

4

x: $0 - m\ddot{x} + \lambda = 0 \;\to\; \boxed{\ddot{x} - \frac{\lambda}{m} = 0}$ 1

z: $-mg - m\ddot{z} + \lambda\left[-ka\cos(kz)\right] = 0$

$\to \boxed{\ddot{z} + g + \frac{\lambda ka}{m}\cos(kz) = 0}$ 2

$G \to$ $\dot{x} - ak\dot{z}\cos(kz) = 0$ a

$\ddot{x} - ak\ddot{z}\cos(kz) + ak^2(\dot{z})^2\sin(kz) = 0$ b

1 $\to \lambda = m\ddot{x} \overset{b}{=} mak\ddot{z}\cos(kz) - mak^2(\dot{z})^2\sin(kz)$

$\overset{2}{=} mak\cos(kz)\left[-g - \frac{\lambda ka}{m}\cos(kz)\right] - mak^2\dot{z}^2\sin(kz)$

5

$$\to \lambda = -mgka\cos(kz) - \lambda (ka)^2\cos^2(kz) - m(\dot z^2 k)ka\sin(kz)$$

$$\to \boxed{\lambda(z,\dot z) = -mg\left[\frac{ka\cos(kz) + \left(\frac{\dot z^2 k}{g}\right)ka\sin(kz)}{1+(ka)^2\cos^2(kz)}\right]}$$

Alkraftarnir eru

$$Q_x(z,\dot z) = \lambda(z,\dot z)\frac{\partial G}{\partial x} = \lambda(z,\dot z)$$

$$Q_z(z,\dot z) = \lambda(z,\dot z)\frac{\partial G}{\partial z} = \lambda(z,\dot z)\,ka\cos(kz)$$

Þannig að þegar við leysum hreyfijöfnuna og fáum $z(t)$ og $\dot z(t)$ getum við reiknað kraftana sem halda ögninni á braut sinni. Það væri ekki einfalt með jöfnum Newtons. Ef við setjum λ inn í hreyfijöfnuna sjáum við aftur sömu jöfnuna og áður.

6

Dæmi 2 Athugum aftur ögn sem er í mættinu $U(x) = -U_0\sin^2(kx/2)$, þar sem k tengist lengdarskalanum L með $k = 2\pi/L$, og $U_0 > 0$

1 Finnum L

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\dot x^2 + U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

2 Hreyfijöfnu

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = 0$$

$$\to \frac{1}{2}2U_0\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\cdot k - m\ddot x = 0$$

$$\to \ddot x - \frac{kU_0}{m}\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot x - \frac{kU_0}{2m}\sin(kx) = 0}$$

7

3 Finnum H, $\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$

$$\boxed{H = p\dot x - L = \frac{m}{2}\dot x^2 - U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right) = \frac{p^2}{2m} - U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

$$= H(p,x)$$

4 Hreyfijöfnur Hamiltons

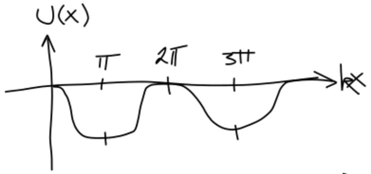
$$\boxed{\dot x = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}}$$

$$\boxed{-\dot p = \frac{\partial H}{\partial x} = -\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)U_0 k = -\frac{U_0 k}{2}\sin(kx)}$$

Einfalt er að sannreyna að þessar jöfnur gefa saman $\ddot x = \frac{kU_0}{2m}\sin(kx)$

8

5 Tíðni smárra sveiflna um einn jafnvægispunkt



$kx = \pi$ er t.d. jafnvægispunktur

setjum $kx = \pi + \delta$, $\quad \delta << 1$

$$\to \ddot x - \frac{kU_0}{2m}\sin(kx) = 0 \qquad \sin(\pi+\delta) = -\sin\delta$$

$$\to \frac{\ddot\delta}{k} + \frac{kU_0}{2m}\sin\delta = 0$$

$$\to \ddot\delta + \frac{k^2U_0}{2m}\delta \simeq 0 \to \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k^2U_0}{2m}} = 2\pi\sqrt{\frac{U_0}{2mL_1^2}}}$$

$$\to \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2mL_1^2}{U_0}}}$$

sem passar við eldri niðurstöður sem við fundum á annan hátt

Dæmi 3 Skoðum kerfi með fall Lagrange

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot x^2+\dot y^2-\omega^2(x^2+y^2)\right] + \alpha\left\{\frac{x\dot y - y\dot x}{x^2+y^2}\right\}$$

Finnum alskriðþungana

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x - \frac{\alpha y}{x^2+y^2}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y + \frac{\alpha x}{x^2+y^2}$$

Sérkennilegir alskriðþungar sem við komum betur að síðar

Finnum hreyfijöfnur

$$x:\ \frac{\alpha\dot y}{x^2+y^2} - m\omega^2 x - \frac{d}{dt}\left\{m\dot x - \frac{\alpha y}{x^2+y^2}\right\} - \alpha\frac{2x(x\dot y - y\dot x)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$y:\ -\frac{\alpha\dot x}{x^2+y^2} - m\omega^2 y - \frac{d}{dt}\left\{m\dot y + \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\right\} - \alpha\frac{2y(x\dot y - y\dot x)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

x:

$$\frac{\alpha\dot y}{x^2+y^2} - \alpha\frac{2x(x\dot y-y\dot x)}{(x^2+y^2)^2} - m\omega^2 x - m\ddot x + \frac{\alpha\dot y}{x^2+y^2} - \frac{2\alpha y(x\dot x+y\dot y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\rightarrow\ \frac{2\alpha\dot y(x^2+y^2) - 2\alpha x(x\dot y-y\dot x) - 2\alpha y(x\dot x+y\dot y)}{(x^2+y^2)^2} - m\omega^2 x - m\ddot x = 0$$

$$\boxed{\ddot x + \omega^2 x = 0}$$

$\ddot y$: á sama hátt og fyrir x:

$$\boxed{\ddot y + \omega^2 y = 0}$$

Því verða hreyfijöfnurnar eins og tveir ótengdir hreintóna sveiflar!

Athugum betur á næstu síðu

Skilgreinum vigursvið

$$\bar A \sim \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

gert úr "viðbótarliðunum" við alskriðþungana

$$\rightarrow\ \bar\nabla\times\bar A \sim \hat e_z\left\{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right\}$$

$$= \hat e_z\left[\frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2xx}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2yy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \hat e_z\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[2x^2+2y^2-2x^2-2y^2\right] = 0 \quad \text{ef } x^2+y^2 \neq 0$$

Hnitaskipti

$$\rightarrow\ \bar A \sim \frac{1}{\rho}\hat a_\phi$$

í pól- eða sívalningshnitum

$$\rightarrow\ \oint_C \bar A\cdot d\bar l = \text{fasti}$$

óháður geisla hringsins C

Kerfið er því hlaðin ögn í tvívíðu fleygbogamætti (rafeind í skammtapunkti). Í gegnum punktinn (0,0) flæðir segulsvið B, sem er alstaðar 0 þar fyrir utan. Vigursviðið A, sem um gildir $\bar B = \bar\nabla\times\bar A$ er hvergi 0.
Hreyfing sígildrar rafeindar fyrir utan (0,0) er óháð B og A, en bylgjufall rafeindar í skammtafræðinni verður vart við segulsviðið í gegnum A. Fasi þess verður háður hreyfistefnu og þeirri rafeind verður að lýsa með líkindabylgju sem víxlast við sjálfa sig. Þetta er ástæða hrifa Aharanov og Bohm. Hlaðin eind "skynjar" segulsvið þó það sé ekki á svæði sem hún kemst inn á ef hún fer í kringum svæðið!
(https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/aharonov-bohm-effect)
(https://www.springer.com/gp/book/9783030522216)

Í skammtafræði verður að lýsa segulsviðinu í gegnum vigursviðið A, sem bætist við skriðþungann. Maxwell og Faraday áttuðu sig á skriðþunga tengingu vigursviðsins A.

(13)

Dæmi 4

$$L = \frac{m}{2}\left\{a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right\} - \frac{K}{2}\left\{ax^2 + 2bxy + cy^2\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

x: $$-\frac{K}{2}2ax - Kby - \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[2a\dot{x} + 2b\dot{y}\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad -Kax - Kby - m\left\{a\ddot{x} + b\ddot{y}\right\} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{a\ddot{x} + b\ddot{y} + \frac{K}{m}\left[ax + by\right] = 0}$$

(14)

y: $$-\frac{K}{2}2cy - Kbx - m\left\{c\ddot{y} + b\ddot{x}\right\} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{c\ddot{y} + b\ddot{x} + \frac{K}{m}\left\{cy + bx\right\} = 0}$$

b) $a = 0$, $c = 0$ $\rightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned}\ddot{y} + \frac{K}{m}y &= 0\\ \ddot{x} + \frac{K}{m}x &= 0\end{aligned}}$$

ótengdir tveir hreintóna sveiflar

c) $b = 0$, $a = -c$ $\rightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{K}{m}x &= 0\\ \ddot{y} + \frac{K}{m}y &= 0\end{aligned}}$$

(15)

Nú má reyna margar túlkanir, en ég ætla að kalla þetta tvo tengda hreintóna sveifla. Víxlverkunin milli þeirra er í gegnum liðina

$$Kbxy \quad \text{og} \quad mb\dot{x}\dot{y}$$

Þannig kerfi munum við athuga í síðasta kaflanum sem við förum í. Þessir sveiflar eru tengdir í gegnum "teygjulið" og "hraðalið". Við munum rekast á þannig kerfi. Þess vegna er "b" tengistuðull í kerfinu.

1

Dæmi 1

$$L'(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt}F(q,t)$$

Höfum sýnt að $\quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = 0$

L' er fall af sömu breytum og L

$$\rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) = 0 \quad \text{ætti að gilda}$$

Sannreynum

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{dF}{dt}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right\} \quad (*)$$

2

Athugum heildarafleiðuna af F

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot q + \frac{\partial F}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial q}$$

$F = F(q,t)$

notum í (*)

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)}_{\text{E-L fyrir } L} + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]}_{=0} = 0$$

3

Dæmi 2 Ögn með massa m hreyfist í kúluyfirborði án þess að ytri kraftar verki á hana. (Heimur hennar er kúluyfirborð með geisla R)

Nýtum Ex. 6.3 í DC, og munum að R er fasti

① 2 alhnit -- yfirborð, hornin úr kúluhnitum spanna það

② $\rightarrow$
$$L = \frac{mR^2}{2}\left[\dot\theta^2 + (\sin^2\theta)\,\dot\phi^2\right] = L(\theta,\dot\phi,\dot\theta)$$

③ Alskriðþungar

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \qquad \text{ekki fasti, því } \theta \text{ kemur fyrir í } L$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mR^2(\sin^2\theta)\dot\phi \qquad \text{fasti, því } \phi \text{ er rásuð breyta}$$

4

Fall Hamiltons

$$H = P_\theta\dot\theta + P_\phi\dot\phi - L = \frac{mR^2}{2}\left[\dot\theta^2 + (\sin^2\theta)\dot\phi^2\right]$$

$$= \frac{P_\theta^2}{2mR^2} + \frac{P_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} = H(P_\theta, P_\phi, \theta)$$

í raun sést hér að H og L eru bæði einfaldlega T í mismunandi breytum

④ Hreyfijöfnur Hamiltons

$$\dot P_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{mR^2}\frac{P_\phi^2\cos\theta}{\sin^3\theta} \qquad \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mR^2}$$

$$\dot P_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \qquad \dot\phi = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2\sin^2\theta}$$

þetta 1. sigs hreyfijöfnuhneppi er mjög heppilegt beint í tölulega reikninga. Hægt er að sýna að hreyfing agnarinnar er alltaf eftir stórhring, en ég sleppti að biðja um það hér.

5

Ögnin finnur fyrir engu ytra mætti. Fall Hamiltons er einungis hreyfiorkan. Enginn núningskraftur vinnur á móti hreyfingunni, Fall Hamiltons er ekki háð tíma, þess vegna er fall Hamiltons hér heildarorka agnarinnar.

Dæmi 3 Ögn með massa m hreyfist í yfirborði sem myndast þegar fleygboga er snúið um z-ás kartísks hnitakerfis. Yfirborðið er kyrrt í þyngdarsviði. Notið sívalningshnitin r (mælt frá samhverfuás yfirborðsins z-ásnum) og φ sem alhnit

Notum sívalningshnit r, ϕ

$$\to \quad L = \frac{m}{2}\left[\dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + \dot z^2\right] - mgz$$

Fleygbogayfirborð $\quad az = r^2 = x^2 + y^2$

$$z = \frac{r^2}{a} \;\to\; \dot z = \frac{2r\dot r}{a}$$

$$\to \quad \boxed{L = \frac{m}{2}\left\{\dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + \frac{4r^2}{a^2}\dot r^2\right\} - mg\frac{r^2}{a}}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{\dot r^2\left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right) + (r\dot\phi)^2\right\} - mg\frac{r^2}{a} = L(r, \dot r, \dot\phi)$$

2 Alskriðþungar og H

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mr^2\dot\phi = \text{fasti}$$ því φ er rásuð breyta

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r\left[1 + \frac{4r^2}{a^2}\right]$$

$$H = p_\phi\dot\phi + p_r\dot r - L = mr^2\dot\phi^2 - \frac{m}{2}r^2\dot\phi^2 + m\dot r^2\left[1 + \frac{4r^2}{a^2}\right] - \frac{m}{2}\dot r^2\left[1 + \frac{4r^2}{a^2}\right] + mg\frac{r^2}{a}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m\left[1 + \frac{4r^2}{a^2}\right]} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + mg\frac{r^2}{a}$$

3 Hreyfijöfnur Hamiltons

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\left[1 + \frac{4r^2}{a^2}\right]}$$

$$\dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -2mg\frac{r}{a} + \frac{p_\phi^2}{mr^3} + \frac{p_r^2\,\frac{8r}{a^2}}{2m\left\{1 + \frac{4r^2}{a^2}\right\}^2}$$

$$\dot\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}$$

$$\dot p_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$ φ er rásuð breyta

④ $$L = \frac{m}{2}\left\{ \dot r^2\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right) + r^2\dot\phi^2 \right\} - mg\frac{r^2}{a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{m}{2}\dot r^2\frac{8r}{a^2} + mr\dot\phi^2 - 2mg\frac{r}{a} - \frac{d}{dt}\left\{ m\dot r\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right)\right\} = 0$$

$$\rightarrow \dot r^2\frac{4r}{a^2} + r\dot\phi^2 - 2g\frac{r}{a} - \ddot r\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right) - \frac{\dot r\, 8r\dot r}{a^2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot r\left(1+\frac{4r^2}{a^2}\right) + \frac{4r\dot r^2}{a^2} - r\dot\phi^2 + 2g\frac{r}{a} = 0}$$

⑤ Finnið tíðni smárra sveiflna agnarinnar þegar $d\varphi/dt = 0$

Hér væri hægt að nota hreyfijöfnuna í síðasta lið, en ég stytti mér leið

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \rightarrow P_\phi = 0 \rightarrow H = \frac{P_r^2}{2m\left\{1+\frac{4r^2}{a^2}\right\}} + \frac{mg}{a}r^2$$

Við þekkjum fall Hamiltons fyrir hreintóna sveifil

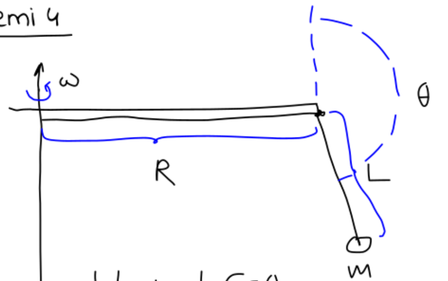
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

Athugun á okkar H sýnir að það lýsi línulegum sveifli ef $\frac{r^2}{a^2} \ll 1$

$$\rightarrow H \rightarrow \simeq \frac{P_r^2}{2m} + \frac{mg}{a}r^2$$

$$\rightarrow \frac{mg}{a^2} = \frac{1}{2}m\omega^2 \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}}$$

Dæmi 4



ég mæli hornið svona til að nýta venjuleg kúluhnit

$$x = R\cos(\omega t) + L\sin\theta\cos\phi$$

$$y = R\sin(\omega t) + L\sin\theta\sin\phi$$

$$z = L\cos\theta$$

$$U = mgL\cos\theta$$

$$\dot x = -\omega R\sin(\omega t) + L\dot\theta\cos\theta\cos\phi - L\dot\phi\sin\theta\sin\phi$$

$$\dot y = \omega R\cos(\omega t) + L\dot\theta\cos\theta\sin\phi + L\dot\phi\sin\theta\cos\phi$$

$$\dot z = -\dot\theta L\sin\theta$$

$$T = \frac{m}{2}\left\{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right\}$$

$$T = \frac{m}{2}\Big[L^2\dot\theta^2 + (L\sin\theta\cdot\dot\phi)^2 + \omega^2R^2\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]$$
$$+ 2\omega RL\left(-\sin(\omega t)\cos\theta\cos\phi\cdot\dot\theta + \sin(\omega t)\sin\theta\sin\phi\cdot\dot\phi\right)$$
$$+ 2\omega RL\left(\cos(\omega t)\cos\theta\sin\phi\cdot\dot\theta + \cos(\omega t)\sin\theta\cos\phi\cdot\dot\phi\right)\Big]$$

$$\rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}\Big\{(L\dot\theta)^2 + (L\sin\theta\cdot\dot\phi)^2 + (\omega R)^2 + \dot\theta\, 2\omega RL\cos\theta\sin(\phi-\omega t) + \dot\phi\, 2\omega RL\sin\theta\cos(\phi-\omega t)\Big\} - mgL\cos\theta}$$

(13)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

$$\rightarrow\ mL^2 \sin\theta\cos\theta\cdot\dot\phi^2 + mgL\sin\theta - \dot\theta\, 2\omega RL\sin\theta\sin(\phi-\omega t)$$

$$+\ \dot\phi\, 2\omega RL\cos\theta\cos(\phi-\omega t)$$

$$-\ \frac{d}{dt}\left\{ mL^2\dot\theta + 2\omega RL\cos\theta\sin(\phi-\omega t)\right\} = 0$$

$$= \dot\phi^2 mL^2\sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta - \cancel{\dot\theta\, 2\omega RL\sin\theta\sin(\phi-\omega t)}$$

$$+\ \cancel{\dot\phi\, 2\omega RL\cos\theta\cos(\phi-\omega t)}$$

$$-\ mL^2\ddot\theta + \cancel{2\omega RL\dot\theta\sin\theta\sin(\phi-\omega t)}$$

$$-\ 2\omega RL\cos\theta\cos(\phi-\omega t)\cdot(\cancel{\dot\phi} - \omega)$$

(14)

$$\rightarrow\ \boxed{\ddot\theta - \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - 2\omega^2 RL\cos\theta\cos(\phi-\omega t) - \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) = 0$$

$$\rightarrow \ldots$$

$$\boxed{\ddot\phi + 2\cot\theta\cdot\dot\theta\dot\phi + \frac{2\omega^2 R}{mL}\,\frac{\sin(\phi-\omega t)}{\sin\theta} = 0}$$

Mér sýnist samanburður við "8.6 Example" í bók DC sýna að þetta verði hreyfijöfnurnar þegar $\omega = 0$, en það þarf að beita einni tímaafleiðu til að sjá það fyrir þessa seinni jöfnu. Það er athyglisvert að snúningur stangarinnar kemur eins og þvingunarliður. Því er öruggt að H lýsir ekki heildarorku kerfisins, þetta er í raun opið kerfi, þar sem snúningurinn bætir við og tekur út orku

①

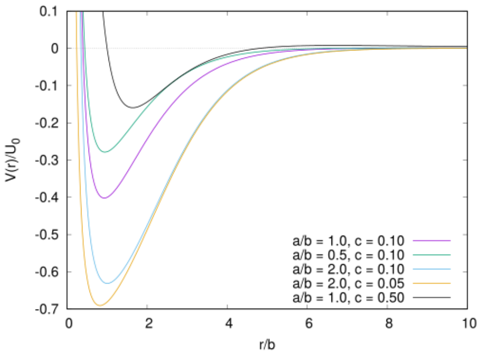
Dæmi 1 Wood-Saxon

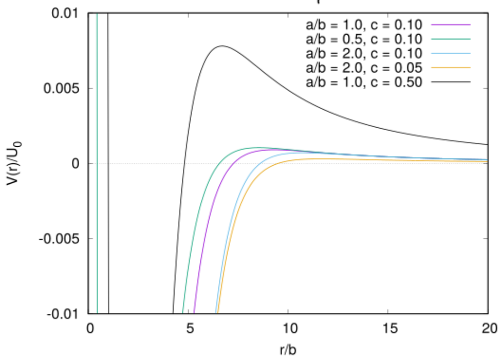
$$U(r) = -\frac{U_0}{1+\exp\left[\frac{r-a}{b}\right]}, \quad a,b>0$$

① Virka mættið

$$V(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}, \quad \ell = \mu r^2 \dot{\theta} \text{ fasti}$$

② Geisli hringbrautar, teiknum fyrst virka mættið $c = \frac{\ell^2}{2\mu b^2}$





②

Búumst við að ögnin geti verið á hringbraut í lágmarki fyrir lágan hverfiþunga skoðum

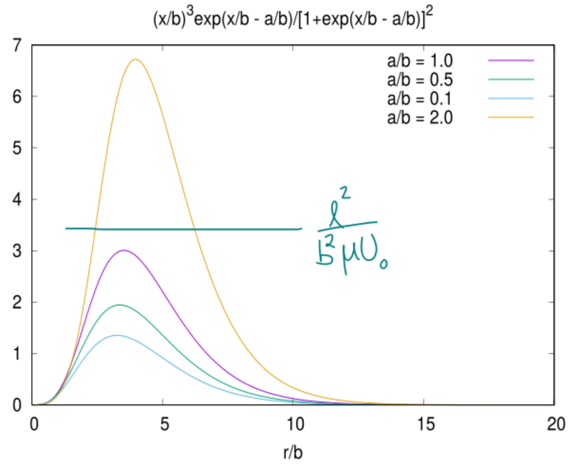
$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{U_0 e^{\frac{r-a}{b}}}{b\left[1+e^{\frac{r-a}{b}}\right]^2} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = 0$$

$$\to \frac{U_0 e^{\frac{r-a}{b}} r^3}{b\left[1+e^{\frac{r-a}{b}}\right]^2} - \frac{\ell^2}{\mu} = 0$$

$$\to \boxed{\frac{e^{\frac{r-a}{b}}\left(\frac{r}{b}\right)^3}{\left[1+e^{\frac{r-a}{b}}\right]^2} - \frac{\ell^2}{b^2\mu U_0} = 0}$$

Óbein jafna fyrir r/b sem ákvarðar lágmark virka mættisins V(r), skoðum vinstri liðinn á grafi

③



Því sést að hverfiþunginn þarf að vera smár fyrir víst gildi á a/b til að tvær lausnir finnist. Þegar við athugum myndirnar á síðu 1 sést að önnur lausnin er stöðug en hin er óstöðug. Þegar hverfiþunginn eykst kemur að því að þessir tveir punktar renna saman og fyrir enn hærri hverfiþunga er engin lausn til lengur fyrir stöðuga hringbraut. Lægri lausnin fyrir r/b er stöðug en hin er óstöðug.

③ Hve háan hverfiþunga getur ögn á hringbraut haft. Verðum að finna það fyrir gefin gildi á a/b. Athugum hámarkið á fallinu á þessari mynd

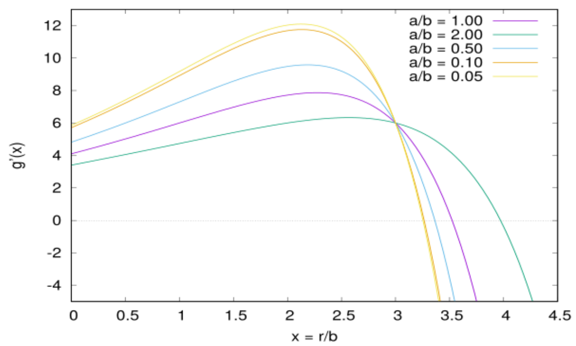
$$g(x) \equiv \frac{e^{x-\frac{a}{b}}x^3}{\left[1+e^{x-\frac{b}{a}}\right]^2}, \quad x = \frac{r}{a}$$

④

$$g'(x) = \frac{e^{x-\frac{a}{b}}x^2}{\left[1+e^{x-\frac{a}{b}}\right]^3}\left\{-2x e^{x-\frac{a}{b}} + x\left(1+e^{x-\frac{a}{b}}\right) + 3\left(1+e^{x-\frac{a}{b}}\right)\right\} = 0$$

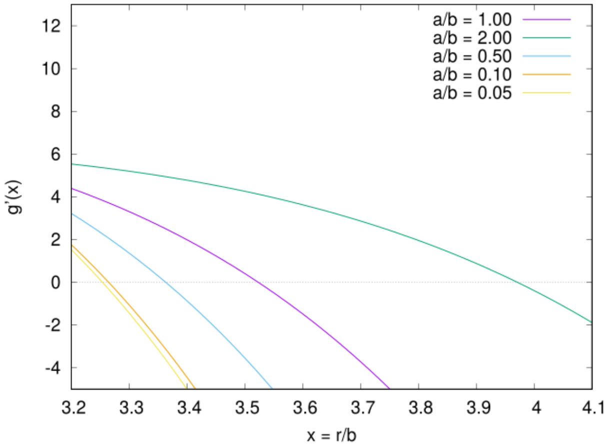
$$\to e^{x-\frac{a}{b}}\left[-2x+x+3\right]+x+3=0$$

$$\to e^{x-\frac{a}{b}}\left[3-x\right]+x+3=0$$



Skoðum á grafi sjáum greinilega lausn fyrir hvert a/b gildi. Leitum að núllstöðvum með wxmaxima (find root) og berum saman við graf á næstu síðu

(5)



a/b	$x = \frac{r}{b}$
1	3,523
2	3,971
0,5	3,363
0,10	3,265
0,05	3,254

síðan notum við

$$\boxed{\ell^2 = g\left(\frac{r}{b};\frac{a}{b}\right) b^2 \mu U_0}$$

(6)

Dæmi 2 Braut $r = k\theta$

Er þannig braut möguleg í miðlægu mætti? Finna þá $F(r)$ og $U(r)$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r)$$

$$\hookrightarrow \left\{\frac{2k^2}{(k\theta)^3} + \frac{1}{k\theta}\right\} = \frac{2k^2}{r^3} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r)$$

$$\rightarrow F(r) = -\frac{\ell^2}{\mu r^2}\left[\frac{2k^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right] = -\frac{\ell^2 2k^2}{\mu r^5} - \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \rightarrow dU = -F(r)\,dr$$

(7)

$$\rightarrow \int_{U(\infty)}^{U(r)} dU = -\int_{\infty}^{r} dr' F(r')$$

$$\rightarrow U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} dr'\left[-\frac{\ell^2 2k^2}{\mu r^5} - \frac{\ell^2}{\mu r^3}\right]$$

$$= \left[-\frac{\ell^2 k^2}{2\mu r^4} - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right]\Bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\left[1 + \frac{k^2}{r^2}\right]$$

Síðan er í þessu tilfelli hægt að setja mættisorkuna 0 í óendanlegu. Takið eftir að U(r) er einhalla og krafturinn er aðdráttarkraftur

(8)

Dæmi 3 $r = k\tanh\theta$?

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r)$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{k\tanh\theta}\right) + \frac{1}{k\tanh\theta} = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\operatorname{sech}^2\theta}{\tanh\theta} + \frac{2\operatorname{sech}^4\theta}{\tanh^3\theta} + \frac{1}{\tanh\theta}\right\}$$

$$= -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r)$$

þar sem

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}$$

$$\rightarrow F(r) = -\frac{\ell^2}{k\mu r^2}\left[\frac{2\operatorname{sech}^2\theta}{\tanh\theta} + \frac{2\operatorname{sech}^4\theta}{\tanh^3\theta} + \frac{1}{\tanh\theta}\right]$$

Notum

$$\tanh\theta = \frac{r}{k}\,, \quad \operatorname{sech}^2\theta = 1-\tanh^2\theta$$

$$\rightarrow \boxed{F(r)} = -\frac{\ell^2}{k\mu r^2}\,\frac{k}{r}\left[2\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)+2\left(\frac{k}{r}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)^2+1\right]$$

$$= -\frac{\ell^2 k}{k\mu r^3}\left\{3-2\left(\frac{r}{k}\right)^2+2\left(\frac{k}{r}\right)^2\left(1-2\left(\frac{r}{k}\right)^2+\left(\frac{r}{k}\right)^4\right)\right]$$

$$= -\frac{\ell^2}{\mu r^3}\left\{3-4-2\left(\frac{r}{k}\right)^2+2\left(\frac{r}{k}\right)^2+2\left(\frac{k}{r}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{\ell^2}{\mu r^3}\left\{2\left(\frac{k}{r}\right)^2-1\right] = \boxed{-\frac{2\ell^2k^2}{\mu r^5}+\frac{\ell^2}{\mu r^3}}$$

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\rightarrow dU = -F(r)\,dr$$

$$\int_{U(\infty)}^{U(r)} dU = -\int_{\infty}^{r} dr' F(r')$$

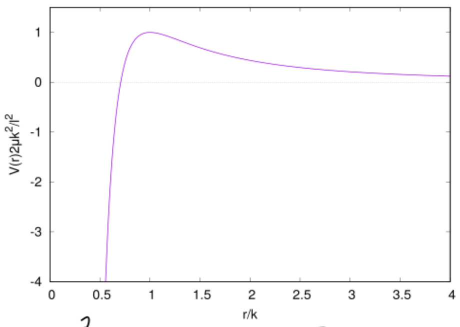
$$\rightarrow U(r)-U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} dr'\left\{-\frac{2(\ell k)^2}{\mu r^5}+\frac{\ell^2}{\mu r^3}\right]$$

$$= \left\{-\frac{\ell^2k^2}{2\mu r^4}+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right]\Bigg|_{\infty}^{r}$$

$$= -\frac{\ell^2k^2}{2\mu r^4}+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

Getum sett $U(\infty)=0$

$$\rightarrow \boxed{U(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\left\{1-\frac{k^2}{r^2}\right]}$$



Skoðum virka mættið

$$V(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu\left(\frac{r}{k}\right)^2k^2} = \frac{\ell^2}{2\mu k^2\left(\frac{r}{k}\right)^2}\left\{2-\left(\frac{k}{r}\right)^2\right]$$

Því lítur út fyrir að brautin sé aðeins fyrir ögn sem er bundin í mættinu. Hnitið r/k er takmarkað í brautarhreyfingunni

Dæmi 4

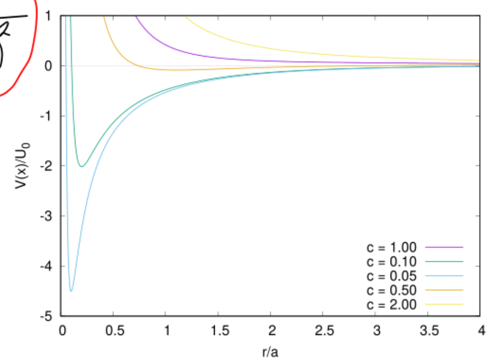
$$U(r) = -U_0\,\frac{e^{-r/a}}{1-e^{-r/a}}\,, \quad a>0$$

① Virka mættið $V(r) = U(r) + \dfrac{\ell^2}{2\mu r^2}$, $\ell = \mu r^2\dot\theta$ fasti

$$\boxed{\frac{V(r)}{U_0} = -\frac{e^{-r/a}}{1-e^{-r/a}}+\frac{\ell^2}{2\mu U_0 a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2}}$$

Fyrir grafið setjum

$$c = \frac{\ell^2}{2\mu U_0 a^2} \leftarrow \text{víddarlaus fasti}$$



13

(2) Lágmarkið í $V(r)$ bendir til þess að fyrir nógu lágan hverfiþunga séu til hringbrautir. Stöðugleikinn kemur í ljós í næstu liðum.

(3) Hver er mesti hverfiþungi sem ögn á hringhreyfingu getur haft í mættinu?

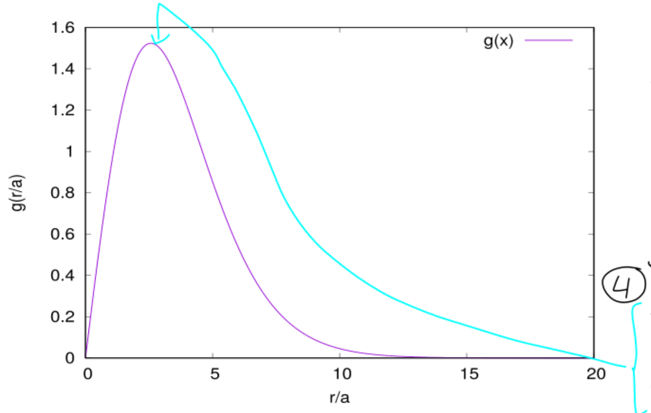
$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{U_0 e^{-r/a}}{a(1-e^{-r/a})^2}\left[(1-e^{-r/a})+1\right] - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{(1-e^{-r/a})^2} - \frac{l^2}{\mu U_0 a^2} = 0}$$

Óbein jafna til að ákvarða geisla hringbrautar í $V(r)$, skoðum hana betur á næstu síðu

14

Setjum $g(x) = x^3 \dfrac{e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}$ og setjum á graf



Því eru til fyrir nógu lágan hverfiþunga tvær hringbrautir, sú innri stöðug og sú ytri óstöðug. Það er erfitt að sjá óstöðuga möguleikann frá grafinu af $V(r)$ hér að framan

(4) Finnum mesta hverfiþungann sem ögn á hringbraut getur haft

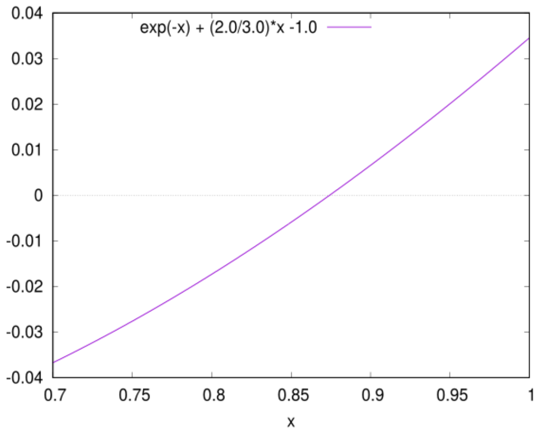
$$g'(x) = \frac{x^2 e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}\left\{-2xe^{-x} - 2x(1-e^{-x}) + 3(1-e^{-x})\right\} = 0$$

15

ef $x \neq 0$

$$\rightarrow \boxed{e^{-x} + \frac{2}{3}x - 1 = 0}$$

Óbein jafna til að finna hámark $g(x)$, skoðum graf



ein lausn sem finna má með wxMaxima: $x = 0{,}8742$

$$\rightarrow \boxed{l^2 = \mu U_0 a^2 g(0{,}8742)}$$

16

(5) Smáar sveiflur um hringbraut

$$L = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu (r\dot{\theta})^2}{2} + U_0 \frac{e^{-r/a}}{1-e^{-r/a}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \rightarrow \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{U_0}{a}\frac{e^{-2r/a}}{(1-e^{-r/a})^2} - \mu \ddot{r} = 0$$

og $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ fasti

$$\rightarrow \boxed{\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} + \frac{U_0}{\mu a}\frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{(1-e^{-r/a})^2} = 0}$$

17

Hringbraut -> $\dot{r}, \ddot{r} = 0$

línuleg nálgun um jafnvægispunkt

$$r = r_0 + \delta, \quad \dot{r} = \dot{\delta}, \quad \ddot{r} = \ddot{\delta}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \simeq \frac{1}{r_0^3}\left[1 - 3\frac{\delta}{r_0} - - -\right]$$

$$e^{-\frac{2r}{a}} = e^{-\frac{2}{a}(r_0+\delta)} = e^{-\frac{2r_0}{a}\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)} \simeq e^{-\frac{2r_0}{a}}\left(1+\frac{\delta}{r_0}+\cdots\right)$$

$$U(r) \longrightarrow \frac{U_0}{a}\frac{e^{-\frac{2r_0}{a}}}{(1-e^{-r_0/a})^2}\left\{1+\frac{\delta}{r_0}+\cdots\right]$$

$$\longrightarrow \ddot{\delta} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r_0^3}\left\{1-\frac{3\delta}{r_0}\right] + \frac{U_0}{\mu a}\frac{e^{-\frac{2r_0}{a}}}{(1-e^{-r_0/a})^2}\left\{1+\frac{\delta}{r_0}\right] \approx 0$$

18

sem gefur

$$\ddot{\delta} + \left\{\frac{3\ell^2}{\mu^2 r_0^4} + \frac{U_0}{\mu a r_0}\frac{e^{-\frac{2r_0}{a}}}{(1-e^{-r_0/a})^2}\right]\delta = 0$$

og jafnvægisskilyrðin aftur

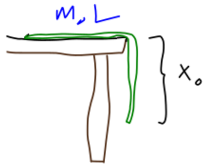
$$\frac{\ell^2}{\mu^2 r_0^3} = \frac{U_0}{\mu a}\frac{e^{-\frac{2r_0}{a}}}{(1-e^{-r_0/a})^2}$$

$$\longrightarrow \Omega^2 = \frac{3\ell^2}{\mu^2 r_0^4} + \frac{U_0 e^{-\frac{2r_0}{a}}}{a r_0 \mu (1-e^{-r_0/a})^2}$$

$$= \frac{4\ell^2}{\mu^2 r_0^4} \qquad \longrightarrow \boxed{\Omega = \frac{2|\ell|}{\mu r_0^2}}$$

1

Dæmi 1   Lengd L, $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$, $x_0>0$



Gamla lausnin var

$$\ddot{x} - \frac{g}{L}x = 0 \,, \quad \tau = \sqrt{\frac{L}{g}}\,\mathrm{ArCosh}\left(\frac{L}{x_0}\right)$$

τ er tíminn þar til reipið fer út af borðinu

Notum núna orkuna til að nálgast lausnina

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \,, \quad F(x) = mx\frac{g}{L}$$

þyngdarkrafturinn á reipið þegar x hangir fram af borðinu, því hluti massans sem hangir er m(x/L)

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F$$

$$\hookrightarrow dU = -F\,dx$$

$$\int_{U(x_0)}^{U(x)} dU = -\frac{mg}{L}\int_{x_0}^{x} dx'\,x' \;\to\; U(x)-U(x_0) = -\frac{mg}{2L}\left(x^2-x_0^2\right)$$

2

setjum $E_T = U(x_0) = 0$ heildarorkan

$$E_T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{mg}{2L}\left(x^2-x_0^2\right)$$

$$\to \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\left(x^2-x_0^2\right) \;\to\; dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{x^2-x_0^2}}$$

$$\to \int_0^{\tau} dt = \pm\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{x_0}^{L}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x_0^2}} = \pm\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\ln\left[2\sqrt{x^2-x_0^2}+2x\right]\Big|_{x_0}^{L}\right\}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{\ln\left[2\sqrt{L^2-x_0^2}+2L\right]-\ln(2x_0)\right\}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\ln\left[\sqrt{\left(\frac{L}{x_0}\right)^2-1}+\frac{L}{x_0}\right]\right]$$

3

Gradsteyn (1.622.6) eða wikipedia gefa okkur að

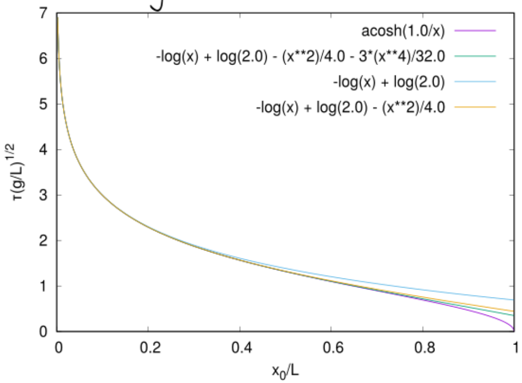
$$\mathrm{ArCosh}(z) = \ln\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]$$

og því

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}\,\mathrm{ArCosh}\left(\frac{L}{x_0}\right)$$

eins og áður, og við völdum jákvæðu grein rótarinnar

skoðum mynd



Hér sést að tíminn lengist upp úr öllu valdi þegar x_0 --> 0, skoðum þetta nánar

4

$$\mathrm{ArCosh}\left(\tfrac{1}{z}\right) = \ln\left[\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}\right] = \ln\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\sqrt{1-z^2}\right]$$

$$= \ln\left[1+\sqrt{1-z^2}\right]-\ln(z) \approx \ln\left[1+1-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{8}\cdots\right]-\ln(z)$$

$$= \ln\left[2-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{8}\right]-\ln(z)$$

$$= \ln(2)+\ln\left[1-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{16}\right]-\ln(z)$$

$$\approx \ln(2)-\frac{z^2}{4}-\ln(z)$$

þegar z --> 0

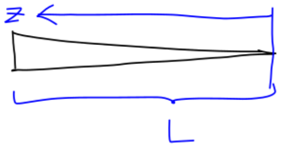
Eins gefur wxmaxima

$$\mathrm{ArCos}\left(\tfrac{1}{z}\right) \to -\ln(z)+\ln(2)-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{32}+\cdots$$

Ég setti því nálganir fyrir tímann á grafið á síðunni á undan

(5)

Dæmi 2 Reipi



þéttleikinn í z $\lambda(z) = \alpha z$

Togum reipið upp á þunna endanum finnum fallið sem lýsir massanum sem kominn er af borðinu þegar hæð endans er z yfir því

$$M(z) = \int_0^z dz' \lambda(z') = \frac{\alpha z^2}{2}, \quad M(L) = M = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$\to \alpha = \frac{2M}{L^2} \to M(z) = \frac{M}{L^2} z^2$$

Þyngd reipis á lofti $M(z)$

Átlag á hönd

$$F_{ump} = \frac{d}{dt}\{M(z) v\}, \quad v = at$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{M}{L^2} z^2 v\right\} = \frac{M}{L^2} a \frac{d}{dt}\{z^2 t\}$$

(6)

$$\to F_{ump} = \frac{M}{L^2} a \left[2z\left(\frac{dz}{dt}\right)t + z^2\right] = \frac{M}{L^2} a\left[2z\dot{z}t + z^2\right]$$

$$= \frac{Ma}{L^2}\{2zvt + z^2\} = \frac{M}{L^2}\{2zv^2 + z^2 a\}$$

..en, $\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz} = a$

$$\to v\,dv = a\,dz \to v^2 = 2az$$

$$\to F_{ump} = \frac{M}{L^2}\{2z\,2az + z^2 a\} = \frac{M}{L^2} 5z^2 a$$

$$\to F_T = M(z) g + \frac{M}{L^2} 5z^2 a = \frac{M}{L^2} z^2 \{g + 5a\}$$

(7)

eða, merkilegt nokk:

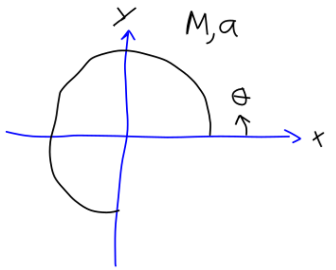
$$F_T = M(z)[g + 5a]$$

heildarkrafturinn á höndina

Nú, vaknar spurningin: Hvað með svona reipi í fyrsta dæmi? Ráðum við við að lýsa því. Svarið er já, en hreyfijafnan verður þannig að best er að leysa hana tölulega, og ef við notum aðferðina með heildarorkunni endum við með ellípsk heildi, ekki af einföldustu gerð!

(8)

Dæmi 3 Setjum 3/4 sneið pizzu upp í hnitakerfi



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\sigma = \frac{M}{A} \to M = \sigma A$$

Massi pizzu á flöt

Flötur pizzu

$$\bar{R}_{cm} = \frac{1}{M}\int_A \bar{r}\, dM = \frac{1}{\sigma A}\int_A \bar{r}\sigma\, dA = \frac{1}{A}\int_A \bar{r}\, dA$$

$$A = (\pi a^2)\frac{3}{4}$$

Hér játast að A hefur fleiri en eitt hlutverk

(a)

$$\boxed{\bar{R}_{CM}} = \frac{1}{A}\int_0^a r\,dr \int_0^{3\pi/2} d\theta \left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^a r^2 dr \int_0^{3\pi/2} d\theta \left(\cos\theta, \sin\theta\right) = \frac{a^3}{3A}(-1,1)$$

$$= \frac{4a^3}{3\pi a^2 3}(-1,1) = \boxed{\frac{4a}{9\pi}(-1,1)}$$

$$\simeq 0{,}1415\,a\,(-1,1)$$

Kemur þetta á óvart, eða er í samræmi við tilfinningu ykkar?

(b)

Dæmi 4

Setjum 270° bauginn með massa M og geisla a eins upp í pólhnitum

$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad L = 2\pi a \cdot \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\bar{R}_{CM}} = \frac{1}{M}\int \bar{r}\,dM = \frac{1}{\lambda L}\int \bar{r}\,\lambda\,dL$$

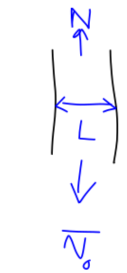
$$= \frac{1}{L}\int \bar{r}\,a\,d\theta = \frac{a\cdot a}{L}\int_0^{3\pi/2} d\theta\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{L}(-1,1) = \frac{4a^2}{6\pi a}(-1,1) = \boxed{\frac{2a}{3\pi}(-1,1)}$$

$$\simeq 0{,}2122\,a\,(-1,1)$$

①

Dæmi 1

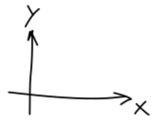


Notum DC (12.36)

$$\bar{F}_r^{eff} = \bar{F} - m\bar{a}_f - m2\bar{\omega}\times\bar{v}_f - m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_r) - m\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}_r$$

eingungis krafur Coriolis skiptir máli hér

$$\bar{v} = -v_0\hat{e}_y$$



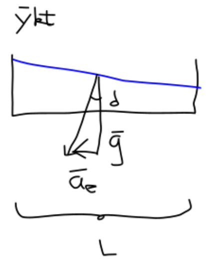
Hnitakerfi samkvæmt mynd 12.7 í DC, kerfi sem snýst með jörðinni

$$\bar{\omega} = 0\hat{e}_x + \omega\cos\lambda\,\hat{e}_y + \omega\sin\lambda\,\hat{e}_z$$

$$\rightarrow \bar{a}_c = 2\{-v_0\hat{e}_y\}\times\{\hat{e}_z\}\,\omega\sin\lambda = \underline{-2v_0\omega\sin\lambda\,\hat{e}_x}$$

--> hröðun í átt að vesturbakka skurðsins

②



Yfirborð vatns í stöðugu ástandi verður alltaf þvert á virka þyngdarkraftinn á það. Köllum hnikunarhornið δ

$$\sin\delta = \frac{a_c}{\sqrt{g^2 + a_c^2}} = \frac{2v_0\omega\sin\lambda}{\sqrt{g^2 + (2v_0\omega\sin\lambda)^2}}$$

því má fá fyrir hæðarmun vatnsborðs við bakkana

$$\boxed{\Delta h = L\sin\delta} = \frac{2v_0L\omega\sin\lambda}{\sqrt{g^2 + (2v_0\omega\sin\lambda)^2}}$$

$\omega = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ rad/s

$g = 9{,}82$ m/s² $L = 50$ m

$v_0 = 12$ m/s $\lambda = \frac{65^\circ\pi}{180}$

$$= 0{,}00808\text{ m} = \boxed{8{,}08\text{ mm}}$$

③

Dæmi 2

Notum jöfnur (12.65-67) til að kanna stærðargráður fyrir kúlu skotinni beint í austur með v_0 = 200 m/s

$\omega = 7{,}3\cdot 10^{-5}$ 1/s

$g = 9{,}82$ m/s²

$\lambda = \frac{65\pi}{180}$

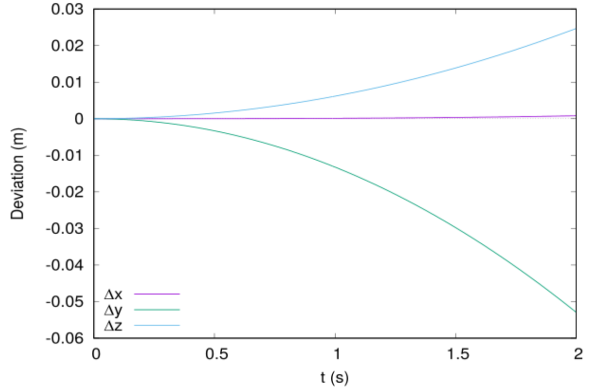
$\dot{z}_0' = 0$

$\dot{y}_0' = 0$

$$\Delta x' = \frac{\omega g t^3}{3}\cos\lambda - \dot{x}_0' t$$

$$\Delta y' = -\omega\dot{x}_0' t^2\sin\lambda$$

$$\Delta z' = \omega\dot{x}_0' t^2\cos\lambda$$



Það gleymist oft að kraftur Coriolis veldur ekki bara hægri beygju, heldur líka þætti upp á við í þessum aðstæðum

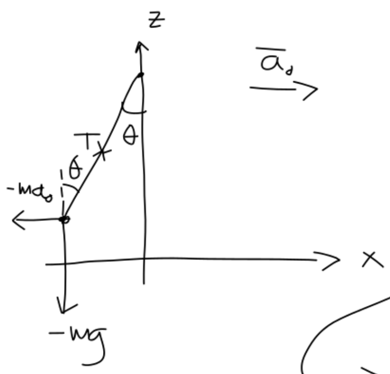
④

Dæmi 3

$$\bar{F}_{eff} = \bar{F} - m\ddot{\bar{R}}_f - m\dot{\bar{\omega}}\times r - m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2m\bar{\omega}\times\bar{v}_r$$

a) Föst hröðun $\bar{a}_0$

finna T og útslag



$$\bar{F}_{eff} = -g\hat{e}_z m - ma_0\hat{e}_x$$

$$= m(-a_0, 0, -g)$$

(z): $T\cos\theta = mg$

(x): $T\sin\theta = ma_0$

$$\tan\theta = \frac{a_0}{g}$$

$\rightarrow \theta = 0$ ef $a_0 = 0$

5

Eins sést að

$$T^2\cos^2\theta + T^2\sin^2\theta = (mg)^2 + (ma_0)^2$$

$$\rightarrow \quad T^2 = (mg)^2 + (ma_0)^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{T = m\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

og áður

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{a_0}{g}\right)}$$

---

b) Hringferð með geisla R og fastri ferð v_0

$$\bar{F}_{eff} = \bar{g} - m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$$

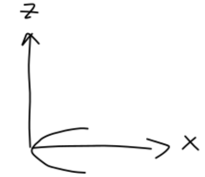
Hnitakerfið snýst með farartækinu

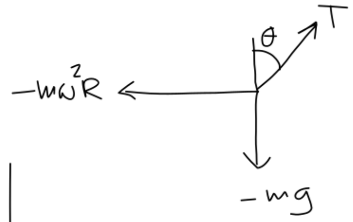
$$\rightarrow \quad \ddot{\bar{R}}_f = 0, \quad \bar{v}_r = 0$$

6

$$\bar{\omega} = \omega\hat{e}_z$$

$$\bar{F}_{eff} = -mg\hat{e}_z - m\omega^2 R\,\hat{e}_x$$





$$T\cos\theta = mg$$

$$T\sin\theta = m\omega^2 R = m\frac{v_0^2}{R}$$

$$v_0 = R\omega$$

$$\rightarrow \omega = \frac{v_0}{R}$$

$$\rightarrow \quad \tan\theta = \frac{mv_0^2}{Rmg} = \frac{v_0^2}{Rg}$$

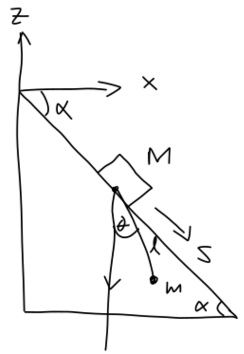
$$\rightarrow \quad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{v_0^2}{Rg}\right)}$$

$$T^2 = (mg)^2 + \left(m\frac{v_0^2}{R}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{T = m\sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}}$$

7

Dæmi 4



Fyrir M: $\begin{cases} x = s\cos\alpha \\ z = -s\sin\alpha \end{cases}$ Hnit massa

fyrir m: $\begin{cases} x = s\cos\alpha + l\sin\theta \\ z = -s\sin\alpha - l\cos\theta \end{cases}$

Alhraðar

$$v_M = \dot{s}$$

$$v_m = \left(\dot{s}\cos\alpha + l\dot{\theta}\cos\theta,\ -\dot{s}\sin\alpha + l\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$\rightarrow \quad v_m^2 = \dot{s}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\left[\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\right]$$

$$= \dot{s}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)$$

8

$$T = \frac{M}{2}v_M^2 + \frac{m}{2}v_m^2, \quad U = Mgz_M + mgz_m$$

$$\rightarrow \quad \boxed{L = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{s}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\right] + Mgs\sin\alpha + mg\left[s\sin\alpha + l\cos\theta\right]}$$

Tvö alhnit, s og θ

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = 0$$

$$Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha - \frac{d}{dt}\left[M\dot{s} + m\dot{s} + ml\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad g(M+m)\sin\alpha - (M+m)\ddot{s} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha) = 0$$

9

$$\to \boxed{(M+m)\ddot{s} + m\ell\left\{\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) - \dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha)\right\} - g(M+m)\sin\alpha = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

$$-m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha) - mg\ell\sin\theta - \frac{d}{dt}\left[m\ell\dot{s}\cos(\theta+\alpha) - m\ell^2\dot{\theta}\right] = 0$$

$$\to -\cancel{m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha)} - mg\ell\sin\theta - m\ell\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) + \cancel{m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha)} - m\ell^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\to m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) + mg\ell\sin\theta = 0$$

$$\to \boxed{\ell\ddot{\theta} + \ddot{s}\cos(\theta+\alpha) + g\sin\theta = 0}$$

10

Smáar sveiflur, fyrst jafnvægisstaða? $\to \ddot{\theta} = 0,\ \dot{\theta} = 0$

(1) $\to \boxed{\ddot{s} - g\sin\alpha \simeq 0}$

(2) $\to \boxed{\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) + g\sin\theta \simeq 0}$

$$\to g\sin\alpha\cos(\theta+\alpha) + g\sin\theta = 0$$

$$\to \theta_0 = -\alpha \quad (\text{og } \theta_0 = \pi - \alpha) \leftarrow \text{óstöðug}$$

$$\to \theta = \theta_0 + \delta = -\alpha + \delta$$

til að kanna smáar sveiflur

11

Setjum inn í hreyfijöfnur

$$(M+m)\ddot{s} + m\ell\left\{\ddot{\delta}\cos(\delta) - \dot{\delta}^2\sin(\delta)\right\} - g(M+m)\sin\alpha = 0$$

$$\to \boxed{(M+m)\ddot{s} + m\ell\left\{\ddot{\delta}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right) - \dot{\delta}^2\left(\delta - \frac{\delta^3}{6}\right)\right\} - g(M+m)\sin\alpha = 0}$$

$$\ell\ddot{\delta} + \ddot{s}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right) + g\sin(-\alpha+\delta) = 0$$

$$\to \ell\ddot{\delta} + \ddot{s}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right) + g\left\{-\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta\right\} = 0$$

eða línulega

$$\boxed{\ell\ddot{\delta} + \ddot{s} - g\sin\alpha + g\cos\alpha\cdot\delta = 0}$$

$$\boxed{(M+m)\ddot{s} + m\ell\ddot{\delta} - g(M+m)\sin\alpha = 0}$$

12

Útbúum nýja breytu

$$\ddot{z} \equiv \ddot{s} - g\sin\alpha$$

til að fá línulega afleiðujöfnuhneppið

$$\boxed{\begin{aligned} &\ell\ddot{\delta} + \ddot{z} + g\cos\alpha\cdot\delta = 0 \\ &(M+m)\ddot{z} + m\ell\ddot{\delta} = 0 \end{aligned}}$$

$$\to \ell\ddot{\delta} - \frac{m\ell}{M+m}\ddot{\delta} + g\cos\alpha\cdot\delta = 0$$

Þetta er annarsstigs afleiðuhneppi, og við lærum í síðasta hluta námskeiðsins að eiga við þau, en hér nýtum við okkur að þetta er einfalt vegna seinni jöfnunar

$$\downarrow$$

$$\boxed{\ddot{\delta} + \frac{g}{\ell}\frac{\cos\alpha}{\left(\frac{M}{M+m}\right)}\delta = 0}$$

$$\leftarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{\ell}\,\frac{M+m}{M}} = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{\ell}\left(1+\frac{m}{M}\right)}}$$

svo er í raun annar sveifluháttur, en vegna útlits seinni jöfnunar er þar $\omega = 0$, skoðum aftur seinna

1

Dæmi 1

M í a(1,0,1)
M í a(0,2,0)
2M í a(0,-2,0)
M í a(1,0,0)

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}\, x_{\alpha,j}\right]$$

$$\boxed{\mathbb{I} = Ma^2 \begin{pmatrix} 13 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 14 \end{pmatrix}}$$

→ eigingildin eru, og vigrarnir

$$Ma^2\left(\frac{27-\sqrt{5}}{2},\ 3,\ \frac{27+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\left(1,0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ a(0,1,0) \\ \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\left(1,0,-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \end{matrix}\ \text{höfuðásar}}$$

2

Útbúum S með því að setja eiginvigrana sem dálka

$$S \doteq \begin{pmatrix} 0{,}85065 & 0 & 0{,}52573 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}52573 & 0 & -0{,}85065 \end{pmatrix}$$

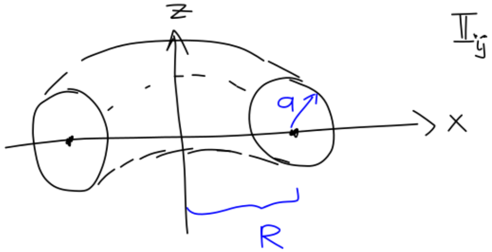
Hornalínuhamur

$$\to S \cdot \mathbb{I} \cdot S^t \sim \begin{pmatrix} 12{,}382 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}618 \end{pmatrix} \sim \mathbb{I}_{diag.}$$

í wxmaxima: "S . I . transpose(S);", þar sem bilin um punktana tákna fylkjamarfðföldun

3

Dæmi 2 Kleinuhringur



$$\mathbb{I}_{ij} = \int_V dv\, \rho(\vec r)\left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]$$

Ég vel sívalningshnit, en það þarf að passa sig

$$\sum_k x_k^2 = x^2+y^2+z^2 \quad \text{kartísk}$$
$$= r^2+z^2 \quad \text{sívaln.}$$

$$\mathbb{I}_{33} = \rho\int_V dv\,(r^2+z^2-z^2) = \rho\int_V dv\, r^2$$

$$= 2\rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-a}^{R+a} r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-(r-R)^2}} dz$$

Ég tek eftir að heildunin í z er samhverf um láréttusléttuna og nota jöfnu hrings miðjaðs í R sem efri mörk. Þá er r-ið takmarkað frá R-a upp í R+a

4

$$\to \mathbb{I}_{33} = 2\pi\, 2\rho \int_{R-a}^{R+a} r^3\, dr\, \sqrt{a^2-(r-R)^2} = 4\pi\rho\left[\frac{3\pi R a^4 + 4\pi R^3 a^2}{8}\right]$$

hér var mjög þægilegt að nota wxmaxima og setja inn mörkin í heildið

$$= \frac{\pi^2 \rho R a^2}{2}\left\{3a^2 + 4R^2\right\}$$

$$V = 2\pi R \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 R a^2$$

$$\to \rho = \frac{M}{2\pi^2 R a^2}$$

$$\to \boxed{\mathbb{I}_{33} = \frac{\pi^2 M R a^2}{2 \cdot 2\pi^2 R a^2}\left\{3a^2+4R^2\right\} = M\left[\frac{3a^2}{4} + R^2\right]}$$

$$I_{11} = \rho \int_V dv \left\{x^2+y^2+z^2-x^2\right\} = \rho \int_V dv \left\{y^2+z^2\right\}$$

$$= 2\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-a}^{R+a} r\,dr \int_0^{\sqrt{a^2-(r-R)^2}} dz \left(r^2 \sin^2\theta + z^2\right)$$

$$= 2\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-a}^{R+a} r\,dr \left\{ z r^2 \sin^2\theta + \frac{z^3}{3} \right\} \Bigg|_0^{\sqrt{a^2-(r-R)^2}}$$

$$I_{11} = 2\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-a}^{R+a} r\,dr \left\{ \sqrt{a^2-(r-R)^2}\, r^2 \sin^2\theta + \frac{\left(a^2-(r-R)^2\right)^{3/2}}{3} \right\}$$

$$= 2\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\sin^2\theta \, \frac{3\pi R a^4 + 4\pi R^3 a^2}{8} + \frac{\pi R a^4}{8} \right]$$

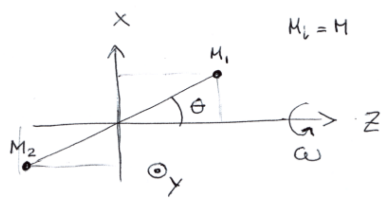
$$= 2\rho \left\{ \frac{3\pi^2 R a^4 + 4\pi^2 R^3 a^2}{8} + \frac{2\pi^2 R a^4}{8} \right\}$$

$$= 2\rho \left[\frac{5\pi^2 R a^4}{8} + \frac{4\pi^2 R^3 a^2}{8} \right] = \rho\, 2\pi^2 R a^2 \left[\frac{5a^2}{8} + \frac{4R^2}{8} \right]$$

$$\rightarrow \boxed{I_{11} = M\left[\frac{5a^2}{8} + \frac{R^2}{2}\right]}$$

Sama niðurstaða fæst fyrir I_{22}, og einfalt er að sannreyna að allir aðrir þættir þinsins hverfa vegna samhverfu, enda er víst að þessir samhverfuásar séu höfuðásar kleinuhringsins.

Dæmi 3



Þyrill í eigin hnitakerfi

$$M_1 = M \quad i \quad A(\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

$$M_2 = M \quad i \; -A(\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

$$\bar{\omega} = \omega \, \hat{e}_z$$

Snúningur um CM (0-punkt eigin hnitakerfis)

$$I = MA^2 \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 2 & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 0 & 2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{L} = I \cdot \bar{\omega}$$

$$= 2MA^2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

9

$$= 2MA^2\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \sin^2\theta \end{pmatrix} = \boxed{2MA^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}}$$

berum saman við

$$\bar{L} = \sum_\alpha m_\alpha (\bar{r}_\alpha \times \bar{v}_\alpha)$$

$$\bar{r}_1 = A(\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

$$\bar{r}_2 = -\bar{r}_1$$

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}_1 = A\sin\theta \cdot \omega\, \hat{e}_y$$

$$\bar{v}_2 = \bar{\omega} \times \bar{r}_2 = -A\sin\theta \cdot \omega\, \hat{e}_y$$

$$\boxed{\bar{L} = 2MA^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}}$$

10

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \bar{\omega}}$$

$$= (2MA^2)\frac{1}{2}(0,0,\omega) \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} 2MA^2\omega\sin\theta\,(0,0,\omega) \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} 2MA^2\omega^2\sin^2\theta = \boxed{M(A\omega\sin\theta)^2}$$

11

$$\boxed{\bar{N} = \bar{\omega} \times \bar{L}} = (0, -L_x\omega, 0) = \boxed{2MA^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\, \hat{e}_y}$$

Dæmi 4

4M í a(0,0,1)
1M í a(0,1,0)
1M í a(1,0,0)

$$\rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{aM}{6M}\left[4(0,0,1) + (0,1,0) + (1,0,0)\right]$$

$$= a\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$ hnit massamiðjunnar

$$\mathbb{J} = Ma^2 \begin{pmatrix} 4+1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hverfitregðuþinurinn fyrir upphafspunkt hnitakerfisins massa-kerfisins

12

Fyrir snúning um massamiðjuna:

$$\boxed{\mathbb{I}^{CM}_{ij}} = \mathbb{J}_{ij} - 6M\left((r_{CM})^2\delta_{ij} - (\bar{r}_{CM})_i(\bar{r}_{cm})_j\right)$$

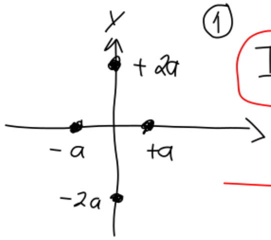
$$= \mathbb{J}_{ij} - 6Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{36}+\frac{4}{9} & -\frac{1}{36} & -\frac{2}{18} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{36}+\frac{4}{9} & -\frac{2}{18} \\ -\frac{2}{18} & -\frac{2}{18} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}$$

1

Dæmi 1

Massi m í
(+a,0,0) og (-a,0,0),
(0,+2a,0) og (0,-2a,0)



①

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j}\right]$$

$$= ma^2 \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

② Festum

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\longrightarrow \bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = ma^2 \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{ma^2\omega}{\sqrt{3}}(8,2,10)$$

2

② Setjum $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$\bar{L}\cdot\hat{n} = ma^2 \frac{\omega}{3} 20 = |\bar{L}| \cos\gamma$$

$$|\bar{L}| = \omega m a^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{64+4+100} \simeq ma^2\omega\, 7{,}4833$$

$$\longrightarrow \cos\gamma = \frac{\bar{L}\cdot\hat{n}}{|\bar{L}|} \simeq 0{,}89087 \longrightarrow \gamma = 0{,}4715 \text{ rad} \simeq 27^\circ$$

þar sem γ er hornið milli vigranna. Mikilvægt er að muna að hér er allt reiknað í hnitakerfi hlutar. Sú aðferðafræði einfaldar alla reikningana. Það eru ein mikilvægustu skilboðin úr köflunum um snúningshreyfingu og hnitakerfi sem ekki eru tregðukerfi.

3

Dæmi 2

Athugum samhverfan snúð án ytra kraftvægis eins og fjallað er um í undirkafla 13.20.1 í bók DC. Umfjöllunin endar með jöfnu (13.139) fyrir tímaafleiðu Eulerhornsins φ, en bein lausn sem fall af tímanum t er sjaldan sett fram fyrir hornin þrjú. Gerum ráð fyrir að snúðurinn sé á hreyfingu með jafnri veltu sem lýst er með jöfnu (13.119). Finnið tímaþróun allra hornanna.

Snúður án ytra vægis $\longrightarrow$

$$(I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 = 0, \quad I_1 = I_2$$

$$(I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_1\dot{\omega}_2 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \longrightarrow \omega_3 = \text{fasti}$$

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0 \quad (*)$$

$$\Omega = (-\dot{\psi}) = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\omega_3$$

↑ fasti

4

Höfum (13.86-88)

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \quad (z)$$

notum með (*) $\longrightarrow$

til að uppfylla upphafsgildi

$$\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = A\cos(\Omega t + \gamma) \quad (a)$$

$$\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi = A\sin(\Omega t + \gamma) \quad (b)$$

$$\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} = \text{fasti} \equiv B$$

5

Notum (a)·$\cos\psi$ og (b)·$\sin\psi$ →

$$\dot\phi\sin\theta\sin\psi\cos\psi + \dot\theta\cos^2\psi = A\cos(\Omega t+\gamma)\cos\psi \qquad (1)$$

$$\dot\phi\sin\theta\cos\psi\sin\psi - \dot\theta\sin^2\psi = A\sin(\Omega t+\gamma)\sin\psi \qquad (2)$$

(1)−(2):

$$\dot\theta = A\cos(\Omega t+\gamma)\cos\psi - A\sin(\Omega t+\gamma)\sin\psi$$

$$= A\cos(\Omega t+\gamma+\psi)$$

jöfn velta → $\dot\theta = 0$ → $A\cos(\Omega t+\gamma+\psi) = 0$

→ $\Omega t+\gamma+\psi = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$, $n = 0,1,2,3,\dots$

6

→ $\boxed{\psi = \psi_0 - \Omega t}$, $\psi_0 = -\gamma + \frac{(2n+1)\pi}{2}$ upphafsgildi

(a)·$\sin\psi$ + (b)·$\cos\psi$ →

$$\dot\phi\sin\theta\sin\psi\sin\psi = A\cos(\Omega t+\gamma)\sin\psi$$

+

$$\dot\phi\sin\theta\cos\psi\cos\psi = A\sin(\Omega t+\gamma)\cos\psi$$

→ $\dot\phi\sin\theta = A\sin(\Omega t+\gamma+\psi)$

→ $\dot\phi = \frac{A}{\sin\theta}\sin(\Omega t+\gamma+\psi)$ (***)

7

notum í (2) og $\psi = \psi_0 - \Omega t$ → $\dot\psi = -\Omega$

→ $\omega_3 = A\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(\Omega t+\gamma+\psi) - \Omega$

$$= A\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(\Omega t+\gamma+\psi_0-\Omega t) - \Omega$$

→ $\omega_3 + \Omega = \frac{A}{\tan\theta}\sin(\gamma+\psi_0) = \frac{A}{\tan\theta}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$

$$= \frac{A}{\tan\theta}$$

→ $\boxed{A = (\omega_3+\Omega)\tan\theta}$

8

$$A = \left[\omega_3 + \left(\frac{I_3-I_1}{I_1}\right)\omega_3\right]\tan\theta = \frac{I_3}{I_1}\tan\theta$$

(***) → $\dot\phi = \frac{I_3}{I_1}\frac{\tan\theta}{\sin\theta}\sin(\Omega t+\gamma+\psi)$

$$= \frac{I_3}{I_1}\frac{1}{\cos\theta}\sin(\underbrace{\gamma+\psi_0}_{\frac{2n+1}{2}\pi})$$

$$= \frac{I_3}{I_1}\frac{1}{\cos\theta}$$

→ $\boxed{\phi = \phi_0 + \frac{I_3 t}{I_1\cos\theta}}$

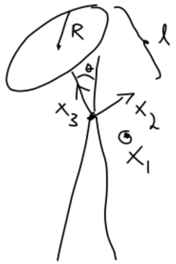
virðist löng leið fyrir svör með einfalt útlit

Dæmi 3

veltuhraði $\bar{\omega} = \Omega \hat{z}$

Steiner

$$I_3 = \frac{MR^2}{2}, \quad I_1 = I_2 = I = \frac{MR^2}{4} + Ml^2$$



$$\underbrace{\omega_3 = \Omega\cos\theta \qquad \bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} \qquad \omega_2 = \Omega\sin\theta}$$

$$\bar{L} = I_3\Omega\cos\theta\,\hat{x}_3 + I\Omega\sin\theta\,\hat{x}_2$$

(13,110) með

$I_1 = I_2$, $\dot{\omega}_3 = 0$

$\omega_1 = 0$, $\dot{\omega}_2 = 0$

$$\underbrace{I\dot{\omega}_1}_{=0} - (I - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$

$$\rightarrow -(I - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$

$$-(I - I_3)\Omega^2\cos\theta\sin\theta = N_1 = Mgl\sin\theta$$

$$\rightarrow -\left(\frac{MR^2}{4} + Ml^2 - \frac{MR^2}{2}\right)\Omega^2\cos\theta = Mgl$$

$$\rightarrow \left(\frac{MR^2}{4} - Ml^2\right)\Omega^2\cos\theta = Mgl$$

$$\rightarrow \Omega^2 = \frac{Mgl}{\cos\theta}\,\frac{1}{\left(\frac{MR^2}{4} - Ml^2\right)} = \frac{4gl}{\cos\theta\left(R^2 - 4l^2\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{4gl}{\cos\theta\left(R^2 - 4l^2\right)}}} \quad \text{ef} \quad \boxed{R > 2l}$$

Dæmi 4

Lítum á kartískt hnitakerfi. Notið horn Eulers til að finna eitt mögulegt val fyrir snúning frá (1,0,0) yfir í einingavigurinn n sem liggur mitt á milli jákvæðu hluta x-, y- og z-ásanna. Finnið snúningsfylkin og sannreynið niðurstöðuna. Hvert er hornið frá n niður á hvern ásanna x, y, eða z?

Frá DC jöfnu (13.83) fáum við því $n = (1,1,1)/\sqrt{3}$

$$\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\theta\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\phi\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Við höfum nokkuð frelsi, svo ég vel að reyna $\phi = -\frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\psi + \cos\theta\sin\psi = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sin\psi + \cos\theta\cos\psi = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad \text{og} \quad \sin\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

og

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\psi &= \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sin\psi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\psi &= \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \cos\psi &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sin\psi &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

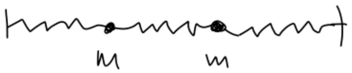
$$\boxed{\lambda_\psi\lambda_\theta\lambda_\phi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

hornið niður á ás, $\gamma \sim 54{,}7^\circ$

1

Dæmi 1



$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}k \qquad M = m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

verkefnið sem þarf að leysa er

$$(A-\omega^2 M)\,\bar a = 0, \qquad \bar a = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Eigingildin og vigrarnir eru

$$\boxed{\omega^2 m = \begin{cases} (2-\sqrt2)k & \text{með } (1,\sqrt2-1) \text{ með lengd } \sqrt{4-2\sqrt2}\\ (2+\sqrt2)k & \text{með } (1,-\sqrt2-1) \text{ — \,||\, — } \sqrt{4+2\sqrt2}\end{cases}}$$

2

Útbúum fylkið (úr stöðluðum eiginvigrunum)

$$U = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt2}}\\ \frac{\sqrt2-1}{\sqrt{4-2\sqrt2}} & \frac{-\sqrt2-1}{\sqrt{4+2\sqrt2}}\end{pmatrix}, \qquad U^T U = 1 = U U^T$$

og

$$U^T A U = A_{diag} = k\begin{pmatrix}2-\sqrt2 & 0\\ 0 & 2+\sqrt2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{U^T A U U^T \bar a = A_{diag}(U^T \bar a)}$$

og normalsveifluhættirnir eru því

$$\bar\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = U^T \bar a = U^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

3

$$\rightarrow \boxed{\bar\eta = U^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_{11}x_1 + U_{12}x_2\\ U_{12}x_1 + U_{22}x_2\end{pmatrix}}$$

η_1 er „samhverfur" háttur með $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(2-\sqrt2)}$

η_2 er „andsamhverfur" háttur með $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(2+\sqrt2)}$

$$\omega_1 < \omega_2$$

lægri orka

hærri orka

4

Tímaháðar lausnir eru $\bar a = U\bar\eta$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\left\{U_{11}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + U_{12}\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}\\ x_2(t) &= \mathrm{Re}\left\{U_{12}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + U_{22}\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}\end{aligned}}$$

óákveðnu stuðlarnir eru tvinntölur $\beta_i = \beta_i' + i\beta_i''$

sem ákvarðast af upphafsgildunum

$$\left.\begin{matrix}x_1(0) & & \dot x_1(0)\\ x_2(0) & \text{og} & \dot x_2(0)\end{matrix}\right\} \rightarrow$$

4 stuðlar og 4 upphafsgildi

5

Dæmi 2

Ég skoða strax dæmi 04 í 9. skammti 2020 og nýti mér T og U eftir að ég hef sett hornið $\alpha = 0$.

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

$$U = -mgl\cos\theta$$

ég hef skipt um nafn á breytunni s, þ.a. s --> x, nú þarf ég að velja breytur og gera T og U kvaðrattískt í þeim. Ég vel x og $(l\theta)$ til að breyturnar haldi sömu vídd

$$T \approx \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}(l\dot{\theta})\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right\}$$

$$\approx \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(l\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}(l\dot{\theta})\right]$$

$$U \simeq -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \longrightarrow \frac{mg}{l2}(l\theta)^2$$

6

því fæst

$$M = \begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix} \qquad A = \frac{mg}{l}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og við þurfum að leysa

$$(A - \omega^2 M)\bar{a} = 0$$

vegna útlits M er augljóst að þetta er almennt eigingildisverkefni, ef við reynum að nota Cholesky LU þáttun eins og í dæmi 04 í 12. skammti 2019 komumst við að því að A er ekki jákvætt ákveðið fylki. Ef við reynum að margfalda með andhverfu M í gegnum jöfnuna til að breyta henni í venjulegt eigingildisverkefni fáum við ekki samhverft fylki, sem þýðir að sú aðgerð hefur brotið upphaflega samhverfu kerfisins. Einfaldast er því að athuga ákveðuna

$$\det\left[A - \omega^2 M\right] = 0$$

7

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{l}\end{pmatrix} - \omega^2 m\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right| = 0, \qquad \alpha = \frac{M}{m}$$

$$\longrightarrow -\omega^2 m(1+\alpha)\left[\frac{mg}{l} - \omega^2 m\right] - (\omega^2 m)^2 = 0$$

--> ein lausn er $\boxed{\omega = 0}$

og hin finnst með

$$-m^2\left(1 + \frac{M}{m}\right)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) - m^2\omega^2 = 0$$

$$\longrightarrow \omega^2 = \frac{m\omega^2}{m+M} + \frac{g}{l}$$

8

$$\longrightarrow \omega^2\left[1 - \frac{m}{m+M}\right] = \frac{g}{l} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{ml}(m+M)}}$$

Svo við höfum tvo normalsveifluhætti, annan með tíðnina 0, hvað þýðir það? Förum til baka í dæmi 04 í 9. skammti 2020 og skrifum niður línulegu hreyfijöfnurnar fyrir $\alpha = 0$, $s \to (\delta\theta)$, $\ddot{z} \to \ddot{x}$

$$l(\ddot{\delta\theta}) + \ddot{x} + g(\delta\theta) = 0$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\delta\theta}) = 0$$

Fyrri jafnan er hreyfijafna kerfisins með ytri þyngdarkrafti, en sú seinni skilgreinir massamiðju þess, eða að í x-stefnuna verkar enginn kraftur á kerfið og lárétti heildarskriðþunginn sé varðveittur.

9

Við erum því með innbyrðishreyfingu í kerfinu (smáar sveiflur) með endnanlega tíðni því þær verða til vegna krafts sem stefnir kerfinu aftur að jafnvægisstöðu þegar því er komið úr henni. Svo er háttur með 0-tíðni sem kemur til vegna þess að þar er enginn kraftur sem kemur kerfinu aftur í jafnvægisstöðu, sú staða er ekki til

Dæmi 3, skoðum aftur 09D-04-2020

$$T = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left\{(l\dot{\theta})^2 + 2\dot{s}(l\dot{\theta})\cos(\theta+\alpha)\right\}$$

$$U = -\left(Mgs\sin\alpha + mgl\cos\theta\right)$$

Nú hjálpar okkur að við vitum úr dæminu að, $\theta = -\alpha + \delta$
þ.e. hvar jafnvægisstaðan er. Hér gætum við spurt okkur hvort ekki megi túlka þetta í ljósi gerfikrafts, þar sem massanum M er hraðað í kerfinu og sveifillinn er í raun í kerfi, sem ekki er tregðukerfi!

10

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos(\delta) \simeq 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\cos\theta = \cos(-\alpha+\delta) = \cos\delta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\delta$$
$$\simeq \left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\cos\alpha + \delta\sin\alpha$$

$\rightarrow$

$$T \simeq \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left\{(l\dot{\delta})^2 + 2\dot{s}l\dot{\delta}\cdot 1\right\}$$

$$U \simeq -Mgs\sin\alpha - mgl\left\{\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\cos\alpha + \delta\sin\alpha\right\}$$

11

$$\rightarrow \mathbb{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{l}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

og því fáum við á svipaðan hátt og áður að

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{lM}(M+m)} \\ 0 \end{cases}$$

Eigingildið eða tíðnin 0 kemur því fyrir, en við vorum feimin að fjalla um hana í dæmi 04 í 9. skammti 2020.

12

Við sjáum að túlkunin á þessum tveimur sveifluháttum er eftir sömu nótum og í dæminu hér að framan. Þó svo að hér sé heildarkraftur í s-stefnuna, sem veldur hröðun er enginn kraftur í þá stefnu sem kemur kerfinu aftur í einhverja jafnvægisstöðu, hún er ekki til!

Til viðbótar skilst okkur að jafnvægishornið kemur til vegna hröðunar kerfisns