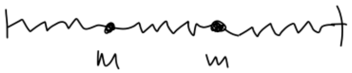
1

Dæmi 1



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} k \qquad M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verkefnið sem þarf að leysa er

$$(A - \omega^2 M)\bar{a} = 0, \qquad \bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Eigingildin og vigrarnir eru

$$\boxed{\omega^2 m = \begin{cases} (2-\sqrt{2})k & \text{með} \quad (1, \sqrt{2}-1) \quad \text{með lengd } \sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ (2+\sqrt{2})k & \text{með} \quad (1, -\sqrt{2}-1) \quad -\text{"}- \quad \sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{cases}}$$

2

Útbúum fylkið (úr stöðluðum eiginvigrunum)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \quad U^T U = 1 = U U^T$$

og

$$U^T A U = A_{diag} = k \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{U^T A U U^T \bar{a} = A_{diag} (U^T \bar{a})}$$

og normalsveifluhættirnir eru því

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = U^T \bar{a} = U^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3

$$\rightarrow \boxed{\bar{\eta} = U^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} x_1 + U_{12} x_2 \\ U_{12} x_1 + U_{22} x_2 \end{pmatrix}}$$

η_1 er „samhverfur" háttur með $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(2-\sqrt{2})}$

η_2 er „andsamhverfur" háttur með $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}(2+\sqrt{2})}$

$$\omega_1 < \omega_2$$

lægri orka

hærri orka

4

Tímaháðar lausnir eru $\bar{a} = U \bar{\eta}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\left\{ U_{11} \beta_1 e^{i\omega_1 t} + U_{12} \beta_2 e^{i\omega_2 t} \right\} \\ x_2(t) &= \mathrm{Re}\left\{ U_{12} \beta_1 e^{i\omega_1 t} + U_{22} \beta_2 e^{i\omega_2 t} \right\} \end{aligned}}$$

óákveðnu stuðlarnir eru tvinntölur sem ákvarðast af upphafsgildunum $\beta_i = \beta'_i + i\beta''_i$

$$\left. \begin{matrix} x_1(0) & & \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) & \text{og} & \dot{x}_2(0) \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{\text{4 stuðlar og 4 upphafsgildi}}$$

⑤

Dæmi 2

Ég skoða strax dæmi 04 í 9. skammti 2020 og nýti mér T og U eftir að ég hef sett hornið $\alpha = 0$.

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

$$U = -mgl\cos\theta$$

ég hef skipt um nafn á breytunni s, þ.a. s --> x, nú þarf ég að velja breytur og gera T og U kvaðratískt í þeim. Ég vel x og $(l\theta)$ til að breyturnar haldi sömu vídd

$$T \approx \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}(l\dot{\theta})\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right\}$$

$$\approx \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(l\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}(l\dot{\theta})\right]$$

$$U \simeq -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \longrightarrow \frac{mg}{l2}(l\theta)^2$$

⑥

því fæst

$$M = \begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix} \qquad A = \frac{mg}{l}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og við þurfum að leysa

$$(A - \omega^2 M)\bar{a} = 0$$

vegna útlits M er augljóst að þetta er almennt eigingildisverkefni, ef við reynum að nota Cholesky LU þáttun eins og í dæmi 04 í 12. skammti 2019 komumst við að því að A er ekki jákvætt ákveðið fylki. Ef við reynum að margfalda með andhverfu M í gegnum jöfnuna til að breyta henni í venjulegt eigingildisverkefni fáum við ekki samhverft fylki, sem þýðir að sú aðgerð hefur brotið upphaflega samhverfu kerfisins. Einfaldast er því að athuga ákveðuna

$$\det\left[A - \omega^2 M\right] = 0$$

⑦

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{l} \end{pmatrix} - \omega^2 m \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \quad , \quad \alpha = \frac{M}{m}$$

$$\longrightarrow \quad -\omega^2 m(1+\alpha)\left[\frac{mg}{l} - \omega^2 m\right] - (\omega^2 m)^2 = 0$$

$\longrightarrow$ ein lausn er $\boxed{\omega = 0}$

og hin finnst með

$$-m^2\left(1 + \frac{M}{m}\right)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) - m^2\omega^2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{m\omega^2}{m+M} + \frac{g}{l}$$

⑧

$$\longrightarrow \omega^2\left[1 - \frac{m}{m+M}\right] = \frac{g}{l} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{ml}(m+M)}}$$

Svo við höfum tvo normalsveifluhætti, annan með tíðnina 0, hvað þýðir það? Förum til baka í dæmi 04 í 9. skammti 2020 og skrifum niður línulegu hreyfijöfnurnar fyrir $\alpha = 0$, $s \to (l\theta)$, $\ddot{z} \to \ddot{x}$

$$l(\ddot{l\theta}) + \ddot{x} + g(l\theta) = 0$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{l\theta}) = 0$$

Fyrri jafnan er hreyfijafna kerfisins með ytri þyngdarkrafti, en sú seinni skilgreinir massamiðju þess, eða að í x-stefnuna verkar enginn kraftur á kerfið og lárétti heildarskriðþunginn sé varðveittur.

9

Við erum því með innbyrðishreyfingu í kerfinu (smáar sveiflur) með endnanlega tíðni því þær verða til vegna krafts sem stefnir kerfinu aftur að jafnvægisstöðu þegar því er komið úr henni. Svo er háttur með o-tíðni sem kemur til vegna þess að þar er enginn kraftur sem kemur kerfinu aftur í jafnvægisstöðu, sú staða er ekki til

Dæmi 3, skoðum aftur 09D-04-2020

$$T = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left[(l\dot{\theta})^2 + 2\dot{s}(l\dot{\theta})\cos(\theta+\alpha)\right]$$

$$U = -\left(Mgs\sin\alpha + mgl\cos\theta\right)$$

Nú hjálpar okkur að við vitum úr dæminu að, $\theta = -\alpha + \delta$
þ.e. hvar jafnvægisstaðan er. Hér gætum við spurt okkur hvort ekki megi túlka þetta í ljósi gerfikrafts, þar sem massanum M er hraðað í kerfinu og sveifillinn er í raun í kerfi, sem ekki er tregðukerfi!

10

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos(\delta) \simeq 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\cos\theta = \cos(-\alpha+\delta) = \cos\delta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\delta \simeq \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)\cos\alpha + \delta\sin\alpha$$

$\longrightarrow$

$$T \simeq \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left[(l\dot{\delta})^2 + 2\dot{s}l\dot{\delta}\cdot 1\right]$$

$$U \simeq -Mgs\sin\alpha - mgl\left\{\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\cos\alpha + \delta\sin\alpha\right\}$$

11

$$\longrightarrow \mathbb{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{l}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

og því fáum við á svipaðan hátt og áður að

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{g\cos\alpha}{lM}(M+m)} \\ 0 \end{cases}$$

Eigingildið eða tíðnin o kemur því fyrir, en við vorum feimin að fjalla um hana í dæmi 04 í 9. skammti 2020.

12

Við sjáum að túlkunin á þessum tveimur sveifluháttum er eftir sömu nótum og í dæminu hér að framan. Þó svo að hér sé heildarkraftur í s-stefnuna, sem veldur hröðun er enginn kraftur í þá stefnu sem kemur kerfinu aftur í einhverja jafnvægisstöðu, hún er ekki til!

Til viðbótar skilst okkur að jafnvægishornið kemur til vegna hröðunar kerfisns