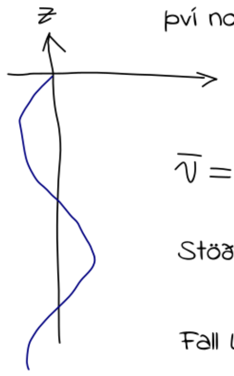
1

Dæmi 1



Fall eftir braut með $x = a\sin(kz)$

því notum við skorðufall $G(x,z) = x - a\sin(kz) = 0$

þyngdarkraftur $f_z = -mg$

$\bar{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{z}\hat{e}_z \to v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$

Stöðuorka $U = mgz$

Fall Lagrange $\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right] - mgz}$

Reynum fyrst aðferð án margfaldara Lagrange, umskrifum fall Lagrange:

$L(\dot{x}, \dot{z}, z) \longrightarrow L(z, \dot{z})$ með G, sem tengir z og x

2

$$\to L = \frac{m}{2}\left[\left(ka\cos(kz)\cdot\dot{z}\right)^2 + \dot{z}^2\right] - mgz$$

$$= \frac{m}{2}\dot{z}^2\left[1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right] - mgz = L(z,\dot{z})$$

Nota jöfnu E-L til að finna hreyfijöfnu

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \to -mg - \frac{m}{2}\dot{z}^2 k (ka)^2 2\sin(kz)\cos(kz) - \frac{d}{dt}\left\{m\dot{z}\left[1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right]\right\} = 0$$

$$\to -g - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz) - \ddot{z}\left\{1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right\} + \dot{z}k(ka)^2 2\sin(kz)\cos(kz)\cdot\dot{z} = 0$$

3

$$\ddot{z}\left\{1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right\} - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz) + g = 0$$

$$\to \boxed{\ddot{z} + \frac{g - (\dot{z}^2 k)(ka)^2\sin(kz)\cos(kz)}{\left[1 + (ka)^2\cos^2(kz)\right]} = 0}$$

Greinilega ólínuleg jafna og ólínuleikinn stýrist að stikanum (ka). Jafnan yrði línuleg ef þessi stiki væri settur á 0, það er ef rétt væri úr brautinni!

Notum margfaldara Lagrange

$$\to \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \lambda\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

4

x: $0 - m\ddot{x} + \lambda = 0 \to \boxed{\ddot{x} - \frac{\lambda}{m} = 0}$ (1)

z: $-mg - m\ddot{z} + \lambda\left[-ka\cos(kz)\right] = 0$

$\to \boxed{\ddot{z} + g + \frac{\lambda ka}{m}\cos(kz) = 0}$ (2)

$G \to$ $\dot{x} - ak\dot{z}\cos(kz) = 0$ (a)

$\ddot{x} - ak\ddot{z}\cos(kz) + ak^2(\dot{z})^2\sin(kz) = 0$ (b)

(1) $\to \lambda = m\ddot{x} \overset{(b)}{=} mak\ddot{z}\cos(kz) - mak^2(\dot{z})^2\sin(kz)$

$\overset{(2)}{=} mak\cos(kz)\left[-g - \frac{\lambda ka}{m}\cos(kz)\right] - mak^2\dot{z}^2\sin(kz)$

5

$$\rightarrow \lambda = -mgka\cos(kz) - \lambda(ka)^2\cos^2(kz) - m(\dot z^2 k)\,ka\sin(kz)$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda(z,\dot z) = -mg\left[\frac{ka\cos(kz) + \left(\frac{\dot z^2 k}{g}\right)ka\sin(kz)}{1+(ka)^2\cos^2(kz)}\right]}$$

Alkraftarnir eru

$$Q_x(z,\dot z) = \lambda(z,\dot z)\frac{\partial G}{\partial x} = \lambda(z,\dot z)$$

$$Q_z(z,\dot z) = \lambda(z,\dot z)\frac{\partial G}{\partial z} = \lambda(z,\dot z)\,ka\cos(kz)$$

Þannig að þegar við leysum hreyfijöfnuna og fáum z(t) og ż(t) getum við reiknað kraftana sem halda ögninni á braut sinni. Það væri ekki einfalt með jöfnum Newtons. Ef við setjum λ inn í hreyfijöfnuna sjáum við aftur sömu jöfnuna og áður.

6

Dæmi 2

Athugum aftur ögn sem er í mættinu $U(x) = -U_0\sin^2(kx/2)$, þar sem k tengist lengdarskalanum L með $k = 2\pi/L$, og $U_0 > 0$

① Finnum L

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\dot x^2 + U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

② Hreyfijöfnu

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}2U_0\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\cdot k - m\ddot x = 0$$

$$\rightarrow \ddot x - \frac{kU_0}{m}\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot x - \frac{kU_0}{2m}\sin(kx) = 0}$$

7

③ Finnum H, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$

$$\boxed{H = p\dot x - L = \frac{m}{2}\dot x^2 - U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right) = \frac{p^2}{2m} - U_0\sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

$$= H(p,x)$$

④ Hreyfijöfnur Hamiltons

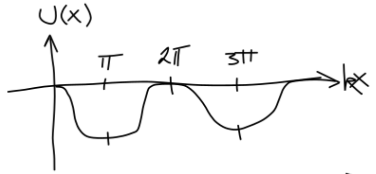
$$\boxed{\dot x = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}}$$

$$\boxed{-\dot p = \frac{\partial H}{\partial x} = -\sin\left(\frac{kx}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)U_0 k = -\frac{U_0 k}{2}\sin(kx)}$$

Einfalt er að sannreyna að þessar jöfnur gefa saman $\ddot x = \frac{kU_0}{2m}\sin(kx)$

8

⑤ Tíðni smárra sveiflna um einn jafnvægispunkt



kx = π er t.d. jafnvægispunktur

setjum $kx = \pi + \delta$, $\delta << 1$

$$\rightarrow \ddot x - \frac{kU_0}{2m}\sin(kx) = 0$$

$\sin(\pi+\delta) = -\sin\delta$

$$\rightarrow \frac{\ddot\delta}{k} + \frac{kU_0}{2m}\sin\delta = 0$$

$$\rightarrow \ddot\delta + \frac{k^2U_0}{2m}\delta \simeq 0 \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k^2U_0}{2m}} = 2\pi\sqrt{\frac{U_0}{2mL_1^2}}}$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2mL_1^2}{U_0}}}$$

sem passar við eldri niðurstöður sem við fundum á annan hátt

Dæmi 3   Skoðum kerfi með fall Lagrange

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2+y^2)\right] + \alpha\left\{\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2}\right\}$$

Finnum alskriðþungana

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{\alpha y}{x^2+y^2}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{\alpha x}{x^2+y^2}$$

Sérkennilegir alskriðþungar sem við komum betur að síðar

Finnum hreyfijöfnur

$$x: \frac{\alpha\dot{y}}{x^2+y^2} - m\omega^2 x - \frac{d}{dt}\left\{m\dot{x} - \frac{\alpha y}{x^2+y^2}\right\} - \alpha\frac{2x(x\dot{y}-y\dot{x})}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$y: -\frac{\alpha\dot{x}}{x^2+y^2} - m\omega^2 y - \frac{d}{dt}\left\{m\dot{y} + \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\right\} - \alpha\frac{2y(x\dot{y}-y\dot{x})}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

x:

$$\frac{\alpha\dot{y}}{x^2+y^2} - \alpha\frac{2x(x\dot{y}-y\dot{x})}{(x^2+y^2)^2} - m\omega^2 x - m\ddot{x} + \frac{\alpha\dot{y}}{x^2+y^2} - \frac{2\alpha y(x\dot{x}+y\dot{y})}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{2\alpha\dot{y}(x^2+y^2) - 2\alpha x(x\dot{y}-y\dot{x}) - 2\alpha y(x\dot{x}+y\dot{y})}{(x^2+y^2)^2} - m\omega^2 x - m\ddot{x} = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Því verða hreyfijöfnurnar eins og tveir ótengdir hreintóna sveiflar!

Athugum betur á næstu síðu

$\ddot{y}$: á sama hátt og fyrir x:

$$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$$

Skilgreinum vigursvið

$$\bar{A} \sim \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

gert úr "viðbótarliðunum" við alskriðþungana

$$\rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{A} \sim \hat{e}_z\left\{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right\}$$

$$= \hat{e}_z\left[\frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2xx}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2yy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \hat{e}_z\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[2x^2+2y^2-2x^2-2y^2\right] = 0 \quad \text{ef } x^2+y^2 \neq 0$$

Hnitaskipti

$$\rightarrow \bar{A} \sim \frac{1}{r}\hat{a}_\phi$$

í pól- eða sívalningshnitum

$$\rightarrow \oint_C \bar{A}\cdot d\bar{l} = \text{fasti}$$

óháður geisla hringsins C

Kerfið er því hlaðin ögn í tvívíðu fleygbogamætti (rafeind í skammtapunkti). Í gegnum punktinn (0,0) flæðir segulsvið B, sem er alstaðar 0 þar fyrir utan. Vigursviðið A, sem um gildir $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ er hvergi 0.

Hreyfing sígildrar rafeindar fyrir utan (0,0) er óháð B og A, en bylgjufall rafeindar í skammtafræðinni verður vart við segulsviðið í gegnum A. Fasi þess verður háður hreyfistefnu og þeirri rafeind verður að lýsa með líkindabylgju sem víxlast við sjálfa sig. Þetta er ástæða hrifa Aharanov og Bohm. Hlaðin eind "skynjar" segulsvið þó það sé ekki á svæði sem hún kemst inn á ef hún fer í kringum svæðið!

(https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/aharonov-bohm-effect)

(https://www.springer.com/gp/book/9783030522216)

Í skammtafræði verður að lýsa segulsviðinu í gegnum vigursviðið A, sem bætist við skriðþungann. Maxwell og Faraday áttuðu sig á skriðþunga tengingu vigursviðsins A.

(13)

Dæmi 4

$$L = \frac{m}{2}\left\{a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right\} - \frac{K}{2}\left\{ax^2 + 2bxy + cy^2\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

x: $-\frac{K}{2}2ax - Kby - \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[2a\dot{x} + 2b\dot{y}\right] = 0$

$\rightarrow$ $-Kax - Kby - m\left\{a\ddot{x} + b\ddot{y}\right\} = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{a\ddot{x} + b\ddot{y} + \frac{K}{m}\left[ax + by\right] = 0}$

(14)

y: $-\frac{K}{2}2cy - Kbx - m\left\{c\ddot{y} + b\ddot{x}\right\} = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{c\ddot{y} + b\ddot{x} + \frac{K}{m}\left\{cy + bx\right\} = 0}$

b) $\left.\begin{matrix} a = 0 \\ c = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \ddot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \\ \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \end{matrix}}$

ótengdir tveir hreintóna sveiflar

c) $\left.\begin{matrix} b = 0 \\ a = -c \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \end{matrix}}$

(15)

Nú má reyna margar túlkanir, en ég ætla að kalla þetta tvo tengda hreintóna sveifla. Víxlverkunin milli þeirra er í gegnum liðina

$$Kbxy \quad \text{og} \quad mb\dot{x}\dot{y}$$

Þannig kerfi munum við athuga í síðasta kaflanum sem við förum í. Þessir sveiflar eru tengdir í gegnum "teygjulið" og "hraðalið". Við munum rekast á þannig kerfi. Þess vegna er "b" tengistuðull í kerfinu.