1

Dæmi 1

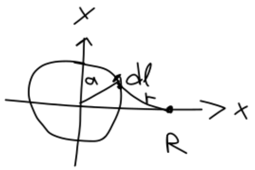
Hugsum okkur þunnan hring með geisla a og massa M sem liggur í x-y-sléttunni með miðju í miðju hnitakerfinu.

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\phi}} = -\frac{GM}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{R}\right)^2-\frac{2a}{R}\cos\phi}}$$

$$= -\frac{GM}{R}\,\frac{4}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\,K\left(\frac{\sqrt{2\left|\frac{a}{R}\right|}}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right), \quad |R|\neq a$$

Höfum notað

$$d\Phi = -G\frac{dM}{r}, \quad r=\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\phi}, \quad d\Phi = -G\rho_\ell\frac{d\ell}{r}$$



$$\rho_\ell = \frac{M}{2\pi a}$$

$$d\ell = a\,d\phi$$

2

2015 var heildið liðað fyrir $R/a \gg 1$

$$\Phi(R)\simeq -\frac{GM}{R}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2+\cdots\right] \simeq -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right]$$

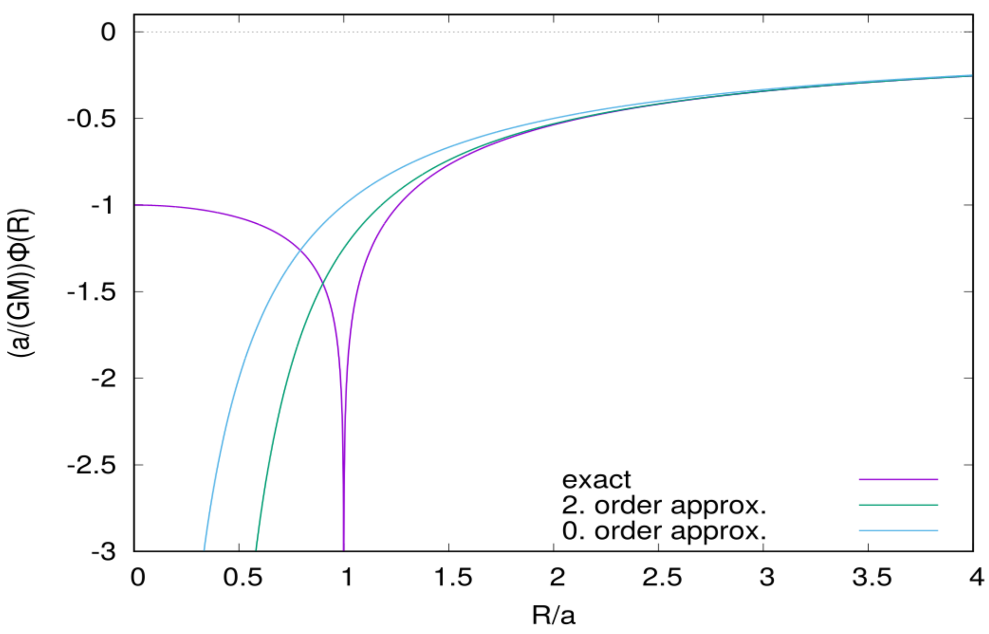
$$\simeq \begin{cases} -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right) & \text{0.-stigs nálgun}\\[2ex] -\frac{GM}{a}\left(\frac{a}{R}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right] & \text{2.-stigs nálgun}\end{cases}$$

Nákvæm lausn, sambærilega sköluð

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{a}\,\frac{4}{\frac{R}{a}\left|1+\frac{a}{R}\right|}\,K\left(\frac{\sqrt{2\left|\frac{a}{R}\right|}}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right) \qquad |R|\neq a$$

3

Gröfum upp og berum saman



4

Á grafinu sést að í miðju hringsins er $\Phi(R) = -GM/a$, enda er núllpunktur þess festur fyrir $R \to \infty$.
Mættið er ekki fast innan hringsins, og það er með sérstöðupunkt fyrir $R = a$.

Dæmi 2

Við skoðum kúlu með geisla a og massadreifingu ρ sem er ekki háð hornunum í kúluhnitum. Þyngdarsviðið innan kúlunnar er óháð geislanum r. Hvernig verður massadreifingin $\rho(r)$ að vera svo það standist?

Um þyngdarsviðið $\bar{g}$ gildir

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{g} = -4\pi G\rho$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{g} = 0$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 g_r\right) = -4\pi G\rho(r)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{2}{r^2}\,r\,g_r = -4\pi G\rho$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{-g_r}{2\pi r G}}$$

þar sem g_r er fasti, $g_r<0$ stefnir að miðju

(5)

Dæmi 3 Yfirborði er lýst með jöfnunni $z = (x^2)/2$. Finnið skemmstu leiðina milli punktanna $(0,0,0)$ og $(1,1,1/2)$. Teiknið upp ferilinn í x-y-sléttunni og berið saman við beina línu

Fjarlægðin er

$$S = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$= \int_{x_0}^{\bar{x}_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2} \qquad \text{þ.s.} \quad \frac{dz}{dx} = x$$

$$= \int_{P_0}^{P_1} dx\, f(y(x), y'(x); x) \overset{\text{hér}}{=} \int_{P_0}^{P_1} dx\, f(y'(x); x)$$

(6)

Jafna Euler og Lagrange er því

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \quad f(y'; x) = \sqrt{1 + (y')^2 + x^2}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}}\right\} = 0}$$

Við erum að finna $y(x)$ sem gefur útgildi (vonandi lágmark) fyrir lengdina S. Afleiðujafnan í bláa rammanum ákvarðar fallið þegar hún er leyst með jaðarskilyrðunum um að ferlinn liggi um punktana tvo.

(7)

$$\longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + x^2}} = \text{fasti} = a$$

$$\longrightarrow \frac{(y')^2}{1 + (y')^2 + x^2} = a^2 \longrightarrow (y')^2 = a^2\left[1 + (y')^2 + x^2\right]$$

$$\longrightarrow (y')^2\left[1 - a^2\right] = a^2\left[1 + x^2\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\sqrt{1 + x^2}}$$

(8)

Þurfum því að heilda

$$dy = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

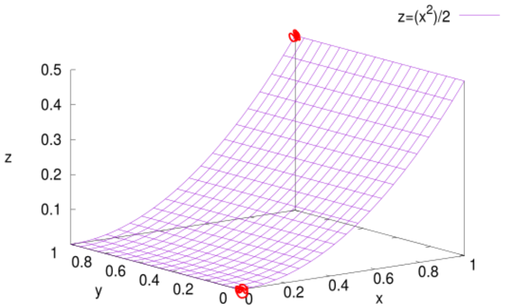
$$\longrightarrow y(x) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\left\{\frac{\operatorname{ArSinh}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}\right\} + C$$

$$y(0) = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$y(1) = 1 \longrightarrow \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\left\{\frac{\operatorname{ArSinh}(1)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = 1$$

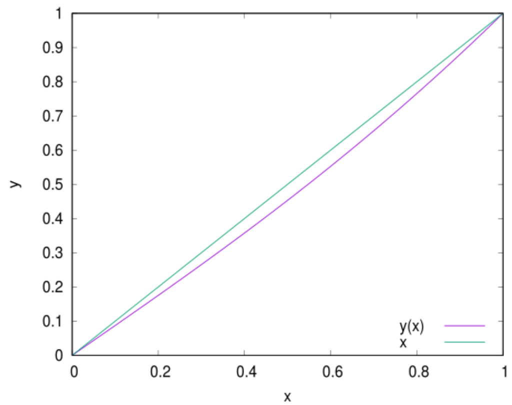
$$\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2}{\operatorname{ArSinh}(1) + \sqrt{2}}$$

Skoðum aðeins grafík, á yfirborðinu



vildum við finna stysta ferilinn milli horn-punktanna (0,0,0) og (1,1,1/2)

Fundum y(x) þannig að í grunnsléttunni (x-y-sléttunni er hann



greinilega nærri beinni línu í grunn-fletinum, en ekki alveg. Það væri gaman að teikna ferilinn upp í yfirborðinu

Dæmi 4 Athugum útgildi

$$J[y] = \int_0^1 dx\, f(y, y'; x)$$

með

$$f(y,y';x) = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{4}y^4$$

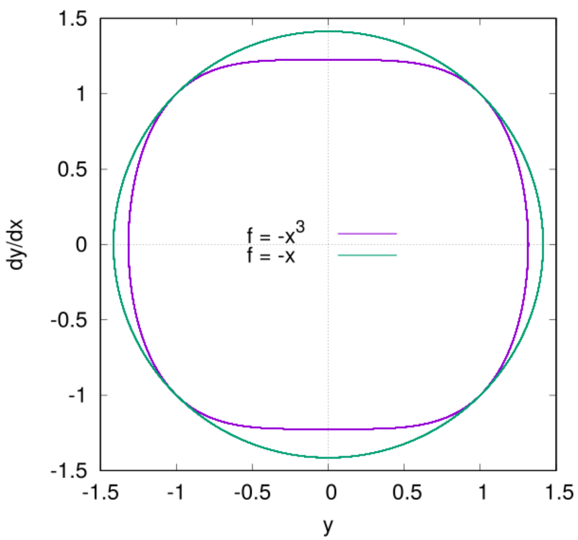
Jafna Eulers og Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -y^3 - \frac{d}{dx}y' = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y'' + y^3 = 0}$$

Ólínuleg jafna, sem erfitt er að leysa með greinireikningi, en mjög þægileg fyrir FORTRAN forritið okkar. Berum lausnina saman við lausn línulegur jöfnunar $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Lausnirnar erum best bornar saman á "fasarúmsriti"



Ef við leyfum okkar túlka x sem tíma, þá er línulega kerfið hreintóna sveifill og ólínulega kerfið er sveifill sem verður stífari fyrir stórt útslag. Þetta sést vel á myndinni.

Fallið f má því túlka sem fall lagrange fyrir kerfið, og J er virknifallið.