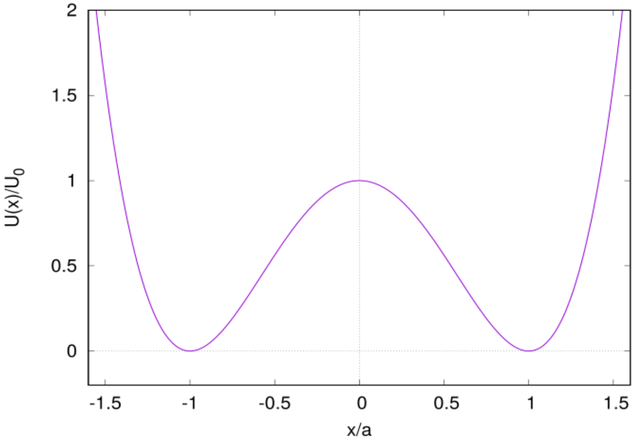
Dæmi 1

1

Ögn hreyfist í mættinu $U(x) = U_0\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}^2$, $a > 0$



$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\left(\frac{U_0}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 4\left(\frac{U_0}{a^2}\right)\left\{3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} U'(\pm 1) = 0,\ U''(\pm 1) > 0, \\ U'(0) = 0,\ U''(0) < 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

x/a = ±1 eru jafnvægisp.
x/a = 0 er óstöðugur jafnvægispunktur

2

b) Smáar sveiflur um jafnvægispunktana

þurfum að kanna $U(x \pm \epsilon)$ fyrir $x = \pm a$

Liðum

$$U(\pm a \pm \epsilon) \simeq 4U_0\left(\frac{\epsilon}{a}\right)^2 + \cdots$$

Í kringum $x = \pm a$ er mættið fleygbogi, á þeim slóðum er því orka kerfisins

$$E_T \simeq \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{4U_0}{a^2}x^2$$

Fyrir hreintóna sveifil með grunntíðni ω er orkan

$$E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

þess vegna er grunntíðni smárra sveiflna okkar kerfis um $x = \pm a$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{8U_0}{ma^2}}} \quad \text{því} \quad \frac{4U_0}{a^2} = \frac{1}{2}m\Omega^2$$

3

c) Einföldum okkur þetta með því að hugsa um ögn í kyrrstöðu sem sett er í mættið U(x) á mismunandi stöðum x. Fyrsta afleiðan af U(x), krafturinn á ögnina í x, er alltaf að einhverjum jafnvægispunkti, ef hún er ekki í jafnvægispunkti. Undantekningin er í punktinum x = 0, þar verkar enginn kraftur á ögnina og hún er ekki í stöðugum jafnvægispunkti. Lítil hnikun staðsetningar kæmi henni af stað í jafnvægispunkt, en í x = 0 verkar enginn kraftur á hana.

Þetta segir ekki að ferill agnarinnar í jafnvægispunktinn verði einfaldur. Hann mætti reikna með tölulegri lausn á hreyfijöfnunni fyrir mismunandi upphafsskilyrði. Munum að kerfið er ólínulegt og því er eins víst að við sjáum lausnina ekki fyrir án reikninga.

Dæmi 2

4

Skoðum hreyfingu agnar í mættinu $U(x) = qE|x|$, þar sem qE eru jákvæðir fastar. Greinilega má búast við sveifluhreyfingu þar sem krafturinn á ögnina er alltaf að x = 0 punktinum. Um mættið er ekki fjallað venjulega þar sem það kemur ekki fyrir í náttúrunni vegna hegðunar þess í x = 0, en það er þó til fyrir hálfan x-ásinn (þyngdar- eða rafkraftur, og í manngerðum hálfleiðurum má nálga það vel fyrir já- og neikvæð x).

Því er best að nota

$$\tau = \pm 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_T - U(x)\right)}}, \quad E_T \text{ er heildarorka agnarinnar}$$

Þó vissulega megi nota kunnáttuna úr E-1 til að finna lotuna.

5

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(qEx_0 - qEx)}} \quad , \quad E_T = qEx_0$$

$$= 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}(x_0 - x)}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0 - x}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{4\sqrt{x_0}}{\sqrt{\frac{2Eq}{m}}}\left[-2\sqrt{1-u}\Big|_0^1\right]$$

$$= 8\sqrt{\frac{x_0 m}{2Eq}}$$

Sveiflutíminn er háður útslagi sveiflunar, sem væri ekki fyrir hreintóna sveifil

(ef $qE = mg$ fæst, $\tau = 8\sqrt{\frac{x_0}{2g}}$)

6

Dæmi 3 Finnið ferla agnar með masa m í fasarúminu sem hreyfist í mættinu $U(x) = qE|x|$

Heildarorkan

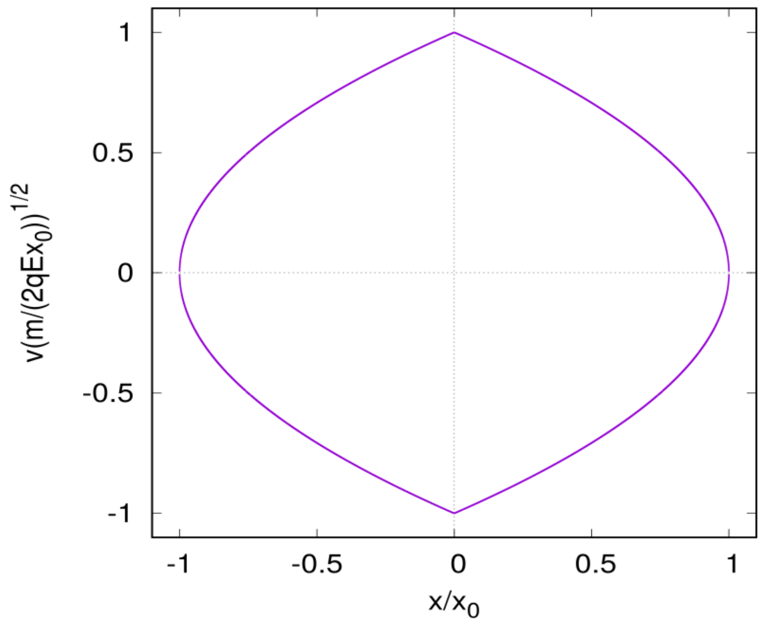
$$E_T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + qE|x| \quad , \quad E_T = qEx_0$$

$$\rightarrow \frac{E_T}{qEx_0} = \frac{m}{2qEx_0}\dot{x}^2 + \left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{m}{2qEx_0}}\,\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{E_T}{qEx_0} - \left|\frac{x}{x_0}\right|} = \pm\sqrt{1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|}$$

7

Ferillinn í fasarúminu er því



8

Dæmi 4 Finnið tvær mismunandi leiðir til að finna röð Fouriers fyrir fallið $\sin^2(x/2)$ skilgreint á bilinu $[0:2\pi]$

Samkvæmt skilgreiningu:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\cos(n\omega t')$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\sin(n\omega t')$$

9

$F(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \tau \to 2\pi, \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin(2\pi n)}{2n(n^2-1)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ef } n = 0 \\ -1/2 & \text{ef } n = 1 \\ 0 & \text{fyrir } n = 2,3,4,\dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\, \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(2\pi n) - 1}{2n(n^2-1)} = 0$$

10

Styttri leið

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$\to \begin{cases} a_0 = 1 \quad \text{og} \quad a_1 = -\frac{1}{2} \\ b_n = 0 \quad \text{og} \quad a_n = 0 \text{ fyrir } n = 2,3,4,\dots \end{cases}$$

munum að $F(x) = \frac{a_0}{2} + \cdots$