①

Dæmi 1 Hreyfingu agnar er lýst þannig að $v(x) = v_0 \exp(-\beta x)$ og $v(x=0) = v_0$ þegar $t = 0$.

a)

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\beta x} \rightarrow \frac{dx}{e^{-\beta x}} = e^{\beta x}\, dx = v_0 dt$$

Notum ákveðna heildun

$$\int_0^x e^{\beta x'} dx' = v_0 \int_0^t dt'$$ þar sem upphafsskilyrðin eru notuð

$$\rightarrow \frac{e^{\beta x'}}{\beta}\Big|_0^x = v_0 t \rightarrow \left\{e^{\beta x} - 1\right\}\frac{1}{\beta} = v_0 t \rightarrow e^{\beta x} - 1 = \beta v_0 t$$

$$\rightarrow e^{\beta x} = 1 + \beta v_0 t \rightarrow \beta x = \ln\left\{1 + \beta v_0 t\right\}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left\{1 + \beta v_0 t\right\} \rightarrow \boxed{v(x(t)) = v_0 e^{-\beta x(t)} = \frac{v_0}{1 + \beta v_0 t}}$$

sjáum að $v(t=0) = v_0$ og $v(x=0) = v_0$

②

b)

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx}$$

Vitum frá fyrri lið

$$\frac{dv}{dx} = -\beta v_0 e^{-\beta x} = -\beta v \rightarrow F = -m\beta v^2$$

$$\rightarrow \boxed{F(t) = -m\beta \frac{v_0^2}{(1 + \beta v_0 t)^2}}$$

c) Hér að ofan sást að

$$\boxed{F = -m\beta v^2 = -m\beta v_0^2 e^{-2\beta x}}$$

③

Dæmi 2 Ögn með massa m ferðast í einvídd í efni með núningskrafti $f = -mk(v^3 + \beta v)$, $v(t=0) = v_0$

því er hreyfijafnan

$$m\frac{dv}{dt} = -mk\left\{v^3 + \beta v\right\} \rightarrow \frac{dv}{v^3 + \beta v} = -k\,dt$$

Heildum ákveðið

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^3 + \beta v} = -k\int_0^t dt' = -kt$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{\beta}\ln(v) - \frac{1}{2\beta}\ln\left(v^2 + \beta\right)\right]\Big|_{v_0}^{v(t)} = -kt$$

④

$$\rightarrow \ln\left\{\frac{v(t)}{\sqrt{v^2(t) + \beta}}\right\} - \ln\left\{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \beta}}\right\} = -kt$$

$$\rightarrow \frac{v(t)}{v_0}\frac{\sqrt{v_0^2 + \beta}}{\sqrt{v^2(t) + \beta}} = e^{-\beta kt}$$

$$\rightarrow \frac{v^2(t)}{v^2(t) + \beta} = e^{-2\beta kt}\frac{v_0^2}{v_0^2 + \beta}$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = \sqrt{\frac{v_0^2 \beta}{(v_0^2 + \beta)e^{2\beta kt} - v_0^2}}}$$

$\underline{v(t \to \infty) = 0}$

5

Hversu langt kemst ögnin?

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{\sqrt{v_0^2\beta}}{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t} - v_0^2}}$$

Ef $x(0) = 0$

$$x = \int_0^t \frac{\sqrt{v_0^2\beta}\, dt'}{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t'} - v_0^2}}$$

Notum (GR:2.315)

$$\boxed{x(t) = \frac{2\sqrt{v_0^2\beta}}{2\beta k v_0}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{(v_0^2+\beta)e^{2\beta k t} - v_0^2}}{v_0}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{\beta}}{v_0}\right)\right]}$$

6

Þegar $t \to \infty$ stefnir arctan á $\pi/2$

$$\longrightarrow \boxed{x(t\to\infty) = \frac{1}{k\sqrt{\beta}}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{v_0}}\right)\right]}$$

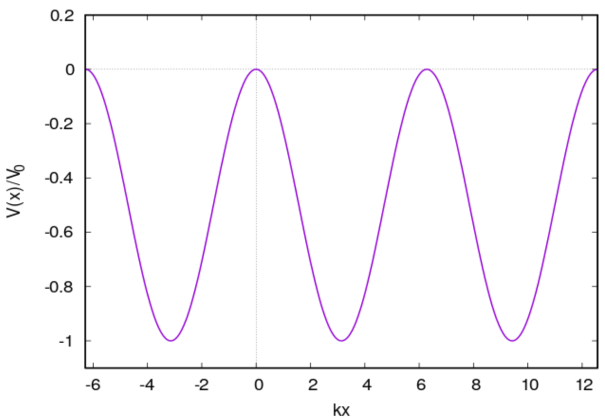
Því sést að

$$x(t\to\infty) \leq \frac{\pi}{2k\sqrt{\beta}}$$

fyrir hvaða upphafshraða v_0 sem er

Dæmi 3 $\quad U(x) = -U_0 \sin^2(kx/2), \quad k = 2\pi/L$

a)



Lotubundið mætti

orka agnarinnar > -Vo

b) Hreyfingin verður staðbundin sveifla, þ.e. lotubundin. Því er náttúrulegur tími kerfisins sveiflutíminn τ

8

c) Notum heildarorkuna

$$E = T + U = \frac{m}{2}v^2 - U_0 \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{m}{2}v^2 = E + U_0 \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)$$

Fyrir mesta útslag sveiflunnar x_0 gildir að E sé einungis stöðuorkan

$$\longrightarrow E = -U_0 \sin\left(\frac{kx_0}{2}\right), \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\longrightarrow \tau = 4\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{kx_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}}$$

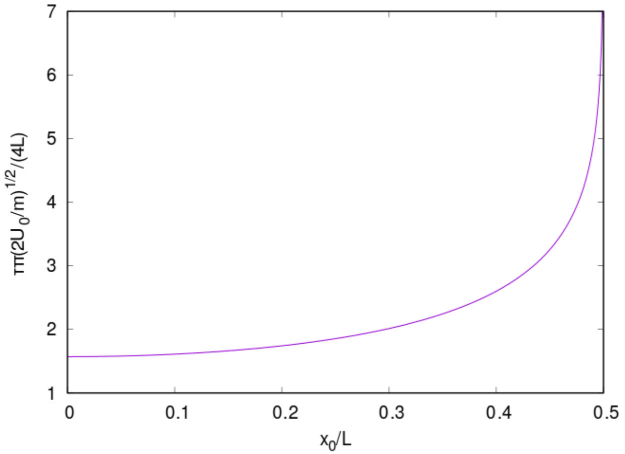
Notum heildi á s. 15 og 16 í 5. fyrirlestri

$$= \frac{4}{k}\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{z_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}} = \frac{8L}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\, K\left(\sin\left(\frac{z_0}{2}\right)\right)$$

9

$$\tau = \frac{4L}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\, K\left(\sin\left(\frac{\pi x_0}{L}\right)\right)$$

K er fyrsta fullkomna sporbaugsheildið (fyrst complete elliptic integral), það er til í gnuplot



Þegar útslagið nálgast hæsta gildið lengist tíminn án takmarka

Sjáum síðar skildleikann við ólínulegan pendúl

10

Dæmi 4

$$v(x) = v_0\left[\tanh\left(\frac{x}{a}\right)+1\right], \quad a>0$$

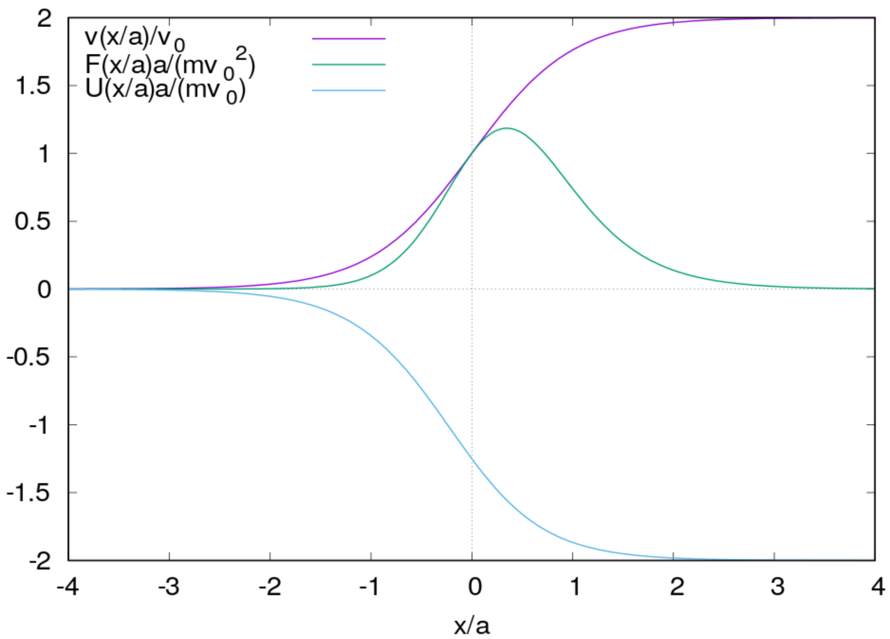
$$F = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = mv_0\left[\tanh\left(\frac{x}{a}\right)+1\right]\frac{v_0}{a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$U(x) = -\int_{-\infty}^{x} dx'\, F(x')$$

$$= -\frac{mv_0}{a}\left\{\frac{2a}{e^{-\frac{2x}{a}}+1} - \frac{a}{2\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right\}$$

$$= mv_0\left\{\frac{1}{2\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2}{e^{-\frac{2x}{a}}+1}\right\}$$

11



12

Þannig að ögnin gæti komið langt að með "föstum" hraða og orðið fyrir krafti á takmörkuðu svæði sem eykur ferð hennar í kringum $x/a = 0$ síðan kemst hún aftur á "fasta" ferð.
Þessu er einnig hægt að lýsa með "mættisþrepinu" sem hún fer fram af í kringum $x/a = 0$. Lengdin a er náttúrulegu lengdarskali sem ákveður seilni mættisins og kraftsins.