1

Dæmi 1 Tvær eindir með massa m víxlverkast þ.a. stöðuorku þeirra er lýst með

$$U(x_1,x_2) = \frac{k}{2}\left[7x_1^2 + 4x_2^2 + \underbrace{4x_1x_2}_{=2x_1x_2+2x_2x_1}\right]$$

Almennt gildir að

$$U = \frac{1}{2}\sum_{jk} A_{jk}\, q_j q_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k$$

því fást

$$A = k\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

og eigingildisverkefnið verður

$$A\bar{a} = \omega^2 M \bar{a} \quad \rightarrow \quad k\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\bar{a} = \omega^2 m \bar{a}$$

sem er hefðbundið eigingildisverkefni fyrir samhverft fylki þar sem fylkið M er á hornalínuham og $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Eigingildin eru

$$\frac{\omega^2 m}{k} = \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}$$

með óstöðluðum eiginvigrum $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

3

Eigingildin er best að skrifa sem

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8k}{m}}}$$

Tölulega staðlaðir eiginvigrar eru þá

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Vigrarnir eru hornréttir og skilgreina hornrétta ummyndun

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

þannig að ef $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ þá fæst

$$U^T A U (U^T \bar{a}) = \omega^2 m (U^T \bar{a})$$

$$U^T \bar{a}_1 = \bar{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

þetta eru eiginvigrarnir í grunni normalháttanna

$$U^T \bar{a}_2 = \bar{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4

því er sagt að normalhættirnir séu $U^T\bar{a} = \bar{\eta}$, eða

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}x_1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}x_2 \\ \eta_2 &= \tfrac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}x_2 \end{aligned}}$$

Tímaháð höfum við

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}, \quad \omega_r = \begin{cases} \omega_1 & : r=1 \\ \omega_2 & : r=2 \end{cases}$$

$$\bar{a} = U\bar{\eta} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{Re}\left\{\beta_1 \tfrac{1}{\sqrt{5}} e^{i\omega_1 t} + \beta_2 \tfrac{2}{\sqrt{5}} e^{i\omega_2 t}\right\} \\ x_2(t) &= \mathrm{Re}\left\{-\beta_1 \tfrac{2}{\sqrt{5}} e^{i\omega_1 t} + \beta_2 \tfrac{1}{\sqrt{5}} e^{i\omega_2 t}\right\} \end{aligned}}$$

Hér þarf að muna eins og við notum síðar að β_i eru tvinntölur og við höfum því 4 óþekkta fasta sem ákvarðast af upphafsgildum $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$

5

Dæmi 2 Þrír sveiflar víxlverkast

$$L = \sum_{n=1}^{3}\left\{\frac{m}{2}\dot{x}_n^2 - \frac{k x_n^2}{2}\right\} + k'\left(x_1x_2 + x_2x_3\right)$$

$$\rightarrow M = \mathbb{I}m, \quad A_y = \begin{pmatrix} k & -k' & 0 \\ -k' & k & -k' \\ 0 & -k' & k \end{pmatrix}$$

$$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$$ með eigingildi

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 m &= k - \alpha k' \\ \omega_2^2 m &= k + \alpha k' \\ \omega_3^2 m &= k \\ \alpha &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k-\alpha k'}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k+\alpha k'}{m}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

6

óstaðlaðir eiginvigrarnir eru

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Stöðlum og myndum hornrétta ummyndunarfylkið

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tímaháðu normalhættirnir eru

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}, \quad \beta_r \in \mathbb{C}, \quad \bar{\eta} = U^T\bar{a}$$

7

$$\bar{a} = U\bar{\eta}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2}\beta_2 e^{i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_3 e^{i\omega_3 t}\right]$$

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right]$$

$$x_3(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\beta_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{\beta_2}{2} e^{i\omega_2 t} - \frac{\beta_3}{\sqrt{2}} e^{i\omega_3 t}\right]$$

Síðan koma líka 3 hraðaskilyrði, en munum að 6 jöfnur þarf til að ákvarða $\beta_i \in \mathbb{C}$ fyrst koma þessi hér á undan

$$2x_0 = \mathrm{Re}\left[\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{2}\beta_3\right] \qquad x_1(0) = x_0$$

$$0 = \mathrm{Re}\left\{-\beta_1 + \beta_2\right\} \qquad x_2(0) = 0$$

$$0 = \mathrm{Re}\left\{\beta_1 + \beta_2 - \sqrt{2}\beta_3\right] \qquad x_3(0) = 0$$

8

$$0 = \mathrm{Im}\left[\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3\sqrt{2}\right] \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$0 = \mathrm{Im}\left[-\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2\right] \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$2v_0 = \mathrm{Im}\left[\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 - \beta_3\omega_3\sqrt{2}\right] \qquad \dot{x}_3(0) = v_0$$

$2 \times (3 \times 3)$ jöfnuhneppi, munum $\boxed{\beta_i = \beta_i' + i\beta_i''}$

lausn

Raunhluti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \beta_1' &= \frac{x_0}{2} \\ \beta_2' &= \frac{x_0}{2} \\ \beta_3' &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

þverhluti:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\sqrt{2} \\ -\omega_1 & \omega_2 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1'' \\ \beta_2'' \\ \beta_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v_0 \end{pmatrix}$$

lausn

$$\boxed{\beta_1'' = \frac{v_0}{2\omega_1}, \quad \beta_2'' = \frac{v_0}{2\omega_2}, \quad \beta_3'' = -\frac{v_0}{\sqrt{2}\,\omega_3}}$$

$$\rightarrow \; x_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\left(-\frac{x_0}{2} - \frac{i v_0}{2\omega_1}\right)e^{i\omega_1 t} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i v_0}{2\omega_2}\right)e^{i\omega_2 t}\right\}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \left\{-\frac{x_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{x_0}{2}\cos(\omega_2 t) - \frac{v_0}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right\}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{x_0\left[-\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] + v_0\left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}\right]\right\}}$$

$(x_2(0) = 0)$

með

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k - \alpha k'}{m}}, \qquad \alpha = \sqrt{2}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + \alpha k'}{m}}$$

Dæmi 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad A\bar{a} = \omega^2 \bar{a}$$

a) Eigingildin samkvæmt wxmaxima

$$\boxed{\omega_1^2 = 3, \quad \omega_2^2 = 8}$$

með stöðluðum eiginvigrum

$$\boxed{\bar{a}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

því er ummyndunarfylkið

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Normalhættirnir eru

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

því

$$\bar{\eta} = U^T \bar{a}$$

Úr normalháttunum $\bar{\eta}$ lesum við:

η_1 er frekar samhverfur CM sveifluháttur með $\omega_1 = \sqrt{3}$

η_2 er frekar andsamhverfur sveifluháttur með $\omega_2 = \sqrt{8}$

b) Örvum bara η_2

þá þarf að velja $\eta_1(0) = 0$, ég bæti við $\dot{\eta}_1(0) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1(0) = -x_2(0)/2 \\ \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)/2 \end{cases}$$

c) Lausnir, $x_1(t)$ og $x_2(t)$ $\qquad \bar{a} = U\bar{\eta}$

$$x_1(t) = \frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{5}}\left\{2\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}$$

$$x_2(t) = \frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{5}}\left\{\beta_1 e^{i\omega_1 t} - 2\beta_2 e^{i\omega_2 t}\right\}$$

13

$$x_1(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2\beta_1' + \beta_2'\}$$

$$x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_1' - 2\beta_2'\}$$

$\beta_\iota = \beta_\iota' + i\beta_\iota''$

ef $x_1(0) = -x_2(0)/2$ $\rightarrow$ $\beta_1' = 0$

$$\dot{x}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2\beta_1''\omega_1 + \beta_2''\omega_2\}$$

$$\dot{x}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_1''\omega_1 - 2\beta_2''\omega_2\}$$

$\rightarrow$ $\beta_1'' = 0$

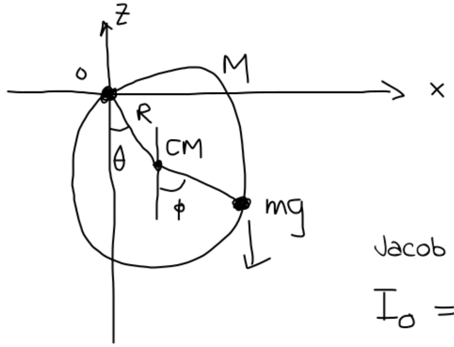
því fæst

$$x_1(t) = \frac{Re}{\sqrt{5}}\{\beta_2 e^{i\omega_2 t}\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta_2'\cos(\omega_2 t) - \beta_2''\sin(\omega_2 t)\}$$

$$x_2(t) = \frac{Re}{\sqrt{5}}\{-2\beta_2 e^{i\omega_2 t}\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{-2\beta_2'\cos(\omega_2 t) + 2\beta_2''\sin(\omega_2 t)\}$$

14

Dæmi 4 Gjörð og frjáls perla



Hnitin eru

$$x = R\{\sin\theta + \sin\phi\}$$

$$y = -R\{\cos\theta + \cos\phi\}$$

Jacob Steiner:

$$I_o = I_{CM} + MR^2 = 2MR^2$$

$$U = U_{arc} + U_m = \{-MgR\cos\theta\} + \{-mgR\cos\theta - mgR\cos\phi\}$$

$$= -MgR\cos\theta - mgR\{\cos\theta + \cos\phi\}$$

15

$$T = \underbrace{\frac{I_o\dot{\theta}^2}{2}}_{\text{gjörð}} + \underbrace{\frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\}}_{\text{perla}}$$

$$\dot{x} = R\{\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi\}$$

$$\dot{y} = R\{\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi\}$$

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\{(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)^2\}$$

$$\approx MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\{\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\}$$

$$U \simeq \frac{MgR}{2}\theta^2 + \frac{mgR}{2}\{\theta^2 + \phi^2\}$$

Í lægstu nálgun fyrir hornin

16

Við erum að leita að línulegum sveifluháttum kerfisins

$$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$$

þá fást

$$M = MR^2\begin{pmatrix} 2+\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{m}{M}$$

$$A = MgR\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

því verður eigingildisverkefnið ekki venjulegt, heldur almenna útfærsla þess

$$A\bar{x} = \lambda B\bar{x}$$

17

Takið eftir að bæði fylkin, M og A, eru samhverf og jákvætt ákveðin. Ef við leysum jöfnuna með því að finna andhverfuna á B eða M og margföldum með henni í gegnum jöfnuna þá verður eigingildisjafnan venjuleg, en ekki með samhverfu fylki! Samt er rétt að taka fram að eigingildin verða þau sömu, en samhverfuvandinn kemur fram í eiginvigrunum. Ósamhverf rauntölugild fylki eiga hægri og vinstri eiginvigra sem ekki eru eins.

Því er betra að leysa verkefnið með Cholesky LU þáttun:

Finnum

$$LL^T = B$$

því þá gildir að

$$A\bar{a} = \lambda B\bar{a} = \lambda L(L^T\bar{a})$$

$$L^{-1}A\bar{a} = \lambda(L^T\bar{a})$$

$$\boxed{L^{-1}A(L^T)^{-1}(L^T\bar{a}) = \lambda(L^T\bar{a})}$$

nýtt samhverft eigingildisverkefni

Eins má fara þá leið að finna fyrst hornrétta ummyndun sem kemur B (eða M) á hornalínuform, skala til nýju hnitin svo hornalínufylkið verði einingarfylki og finna svo aðra ummyndun fyrir A ...

18

$$M = MR^2\begin{pmatrix} 2+\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \longrightarrow \quad a = \sqrt{2+\alpha}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{2+\alpha}}, \quad c = \sqrt{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

$$\longrightarrow MR^2LL^+ = M$$

$$A = MgR\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow L^{-1}A(L^T)^{-1} = MgR\begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} & -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} \\ -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+2)} + \frac{\alpha+2}{2} \end{pmatrix}$$

Samhverft $\longrightarrow$

19

Fylkið leiðir til eigingilda

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \begin{cases} 1+\alpha \\ 1/2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$$

með eiginvigrum

$$(L^T\bar{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (L^T\bar{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2\alpha}}{(2\alpha^2+6\alpha+4)} \end{pmatrix}$$

Síðan er einfalt að ummynda til baka til að finna a_1 og a_2, sem eru eiginvigrar upphaflega samhverfa almenna eigingildisverkefnisins. Best er að kanna hættina þegar M=m og draga ályktanir þar af. Fyrri hátturinn er andsamhverfur, en sá síðari er massamiðjusveifluháttur. Þegar M≠m er vert að taka eftir massamiðjunni og hreyfingum hennar.