Dæmi 1 Hverfiþungaþinur hlutar er

$$\mathbb{I} = I_0 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a)
þar sem I_0 hefur víddina ML^2
wxMaxima gefur mér eigingildin

$$0,\ I_0,\ I_0$$

með eiginvigrana

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

því get ég búið til fylkið R=U úr eiginvigrunum þ. a.:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

þannig að

$$U^{+}\mathbb{I}\,U = I_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eiginvigrar samhverfs raungilds fylkis skilgreina hornrétta ummyndun, (eða snúning)

þyrill - (rotor)

c) $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt2}(\hat{x}+\hat{z}) = \frac{\omega}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\to \bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{\omega I_0}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ eru ekki samsíða þar sem $\bar{\omega}$ er ekki samsíða höfuðás kerfisins

d) En þegar $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt2}(\hat{x}-\hat{y}) = \frac{\omega}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt2} I_0 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Nú eru $\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ samsíða því $\bar{\omega}$ er samsíða höfuðás, ($\bar{\omega}$ er samsíða eiginvigri $\mathbb{I}$)

e) Ekkert ytra vægi --> $|\bar{L}|$ og $\bar{L}$ eru varðveitt. Þetta á við d)-lið, en ekki við c)-lið

f) $$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt2}(\hat{x}-\hat{y}),\quad T = \frac12 \bar{\omega}\cdot\mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = \frac{I_0}{2}\frac{\omega}{\sqrt2}(1,-1,0)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{\omega}{\sqrt2}$$

$$= \frac{\omega^2}{4} I_0$$

Dæmi 2 Stjarfhlutur settur saman úr mössum m staðsettum í

$(0,0,\frac{L}{\sqrt3})$
$(0,\frac{L}{2},-\frac{L}{2\sqrt3})$
$(0,-\frac{L}{2},-\frac{L}{2\sqrt3})$

Massamiðja í $(0,0,0)$

a) Finnum höfuðása kerfisins og hverfitregður þess um þá. Kerfið er jafnhliða þríhyrningur í y-z-sléttu

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} m\left\{\delta_{ij}\left(\sum_{k=x}^{z} x_{\alpha k}^2\right) - x_{\alpha i}x_{\alpha j}\right\}$$

$$I_{xx} = \sum_{\alpha}^{3} m\left[y_\alpha^2 + z_\alpha^2\right] = m\left\{2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{L}{2\sqrt3}\right)^2 + \frac{L^2}{3}\right\}$$

og á sams konar hátt
$$= m\left\{\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{6} + \frac{L^2}{3}\right\} = mL^2$$

$$I_{yy} = \frac{mL^2}{2},\quad I_{zz} = \frac{mL^2}{2}$$

Eins fæst $I_{yz} = 0,\ I_{zy} = 0$

$I_{zx} = 0,\ I_{xz} = 0$

$$I_{zy} = -\sum_{\alpha} m\left\{-\frac{L^2}{4\sqrt3} + \frac{L^2}{4\sqrt3}\right\} = 0,\quad I_{yz} = 0$$

og
$$\mathbb{I} = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Hornalínuform --> augljósir eiginvigrar

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Köllum þá v_x, v_y, v_z

b) Kerfinu er nú snúið um 45° um z-ás, þannig að hnit massanna verða

$$\left(0,0,\frac{L}{\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{L}{2\sqrt2}, \frac{L}{2\sqrt2}, -\frac{L}{2\sqrt3}\right),\ \left(\frac{L}{2\sqrt2}, -\frac{L}{2\sqrt2}, -\frac{L}{2\sqrt3}\right)$$

því fást nú

$$I_{xx} = mL^2\left[2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{4}mL^2$$

$$I_{yy} = mL^2\left\{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{3}{4}mL^2$$

$$I_{zz} = mL^2\left\{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}mL^2$$

$$I_{yx} = -\sum_\alpha m[x_\alpha y_\alpha] = -mL^2\left\{-\frac{2}{4\cdot 2}\right\} = \frac{mL^2}{4}$$

$$I_{zx} = -\sum_\alpha m[x_\alpha z_\alpha] = -mL^2\left\{\frac{1}{4\sqrt{6}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right\} = 0$$

$$I_{zy} = -\sum_\alpha m[y_\alpha z_\alpha] = -mL^2\left\{\frac{1}{4\sqrt{6}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right\} = 0$$

því fæst

$$\mathbb{I}' = mL^2\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

með eigingildi og vigra $\lambda_1 = mL^2, \quad \lambda_2 = \frac{mL^2}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{mL^2}{2}$

$$v'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad v'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v'_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Eigingildin eru þau sömu og áður fyrir $\mathbb{I}$, eiginvigrarnir eða höfuðásarnir eru breyttir.

c) Hefðum við geta séð þessar niðurstöður fyrir, án reikninga?

Söfnum saman staðreyndum, setjum saman snúningsfylkið um z-ásinn um 45°

$$R(\pi/4) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

þá fæst $\boxed{R\,\mathbb{I}'R^T = \mathbb{I} = \mathbb{I}_d}$

og áður

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{U^T\mathbb{I}'U = \mathbb{I} = \mathbb{I}_d}$$

og $\boxed{U = R^T}$, $\boxed{Rv'_1 = v_1, \quad Rv'_2 = v_2, \quad Rv'_3 = v_3}$

Hvernig túlkum við þessar niðurstöður?

Kerfinu var snúið um 45°

$$Uv_1 = v'_1, \quad Uv_2 = v'_2, \quad Uv_3 = v'_3$$

$$\mathbb{I}'v' = \lambda v'$$

$$\lambda v = \lambda U^T v' = U^T\mathbb{I}'v' = U^T\mathbb{I}'U(U^Tv') = \mathbb{I}v$$

og sams konar fyrir R. Fyrir U er venjan að segja að ef hnitakerfi er snúið um visst horn þá fáist upprunalegu eiginvigrarnir með því að snúa þeim nýju til baka um sama horn. Sams konar skýring er fyrir R.

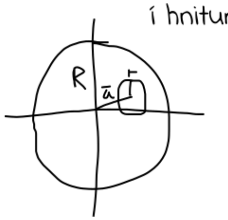
Nýju eiginvigrarnir, skilgreina nýtt hnitakerfi, höfuðásana, sem við fáum táknaða við gamla hnitakerfið.

Í skammtafræði er venjan að tala um snúning hnitakerfisins til að finna útsetningu virkja Hamiltons í hnitakerfi sem gefur hornalínuform hans.

Rúmið getur verið óendanlega vítt. Tölulegar aðferðir eru þá í afstífðu rúmi.

Dæmi 3

Kúla með geisla R, hol með geisla r og miðju í (a_1,a_2,a_3) í hnitum kúlunnar



$$I_{ij} = \int_V dv\, \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]$$

Skoðum lausn á dæmi 1 í 10. skammti á vefnum fyrir 2015. Um hvaða ás sem er um miðju kúlunnar fæst

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

því fáum við fyrir einsleita heila kúlu

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Notum setningu Jacob Steiner um samsíða ása

$$J_{ij} = I_{ij} - \frac{2}{5}mr^2 - m\left[a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

$$X_i = x_i + a_i \qquad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$I_{ij} = \delta_{ij}\frac{2}{5}MR^2$$

$$J_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{2MR^2}{5} - \frac{2}{5}mr^2\right) - M\frac{r^3}{R^3}\left[a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]$$

$$= \delta_{ij}\left\{\frac{2M}{5}\left(R^2 - \frac{r^5}{R^3}\right) - M\frac{r^3 a^2}{R^3}\right\} + M\frac{r^3}{R^3}a_i a_j$$

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

$$m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$$

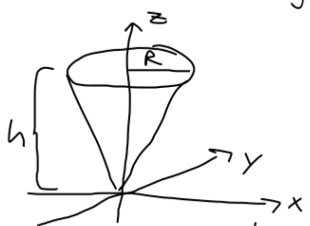
$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$m = \frac{4\pi}{3}r^3\frac{3M}{4\pi R^3} = M\frac{r^3}{R^3}$$

Drögum holið frá

Dæmi 4

Keila snýst um topppunkt



Notum sívalningshnit, flötur: $r = \frac{z}{h}R$

$$I_{ij} = \rho\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z}{h}R} r\,dr \underbrace{\left[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]}_{\Theta_{ij}}$$

$$x_3 = z$$

$$x_2 = r\sin\phi$$

$$x_3 = r\cos\phi$$

$$\Theta_{11} = \left[y^2+z^2\right] = r^2\sin^2\phi + z^2$$

$$\Theta_{22} = \left[x^2+z^2\right] = r^2\cos^2\phi + z^2$$

$$\Theta_{33} = \left[x^2+y^2\right] = r^2$$

$$V = 2\pi\int_0^h dz\int_0^{\frac{z}{h}R} dr\, r = \frac{2\pi}{2}\int_0^h dz\left(\frac{zR}{h}\right)^2 = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$I_{ij} = 0 \quad \text{ef } i \neq j$$

vegna samhverfu, heildið um 2π yfir hornaföllin hverfur

$$I_{33} = 2\pi\rho\int_0^h dz\int_0^{\frac{z}{h}R} dr\, r^3 = 2\pi\rho\int_0^h dz\left(\frac{zR}{h}\right)^4\frac{1}{4}$$

$$= \rho\frac{\pi R^3}{10}Rh$$

$$M = V\rho = \frac{\pi R^2 h}{3}\rho \rightarrow \rho = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

$$\rightarrow I_{33} = \frac{3M}{\pi R^2 h}\frac{\pi R^3}{10} R h = \frac{3M}{10} R^2$$

$$I_{11} = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z}{h}R} r\,dr \left[r^2 \sin^2\phi + z^2 \right]$$

$$= \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \frac{\left(\frac{zR}{h}\right)^4}{4} \sin^2\phi + z^2 \frac{\left(\frac{zR}{h}\right)^2}{2} \right\}$$

$$= \rho \int_0^h dz \left\{ \frac{R^4 z^4 \pi}{4h^4} + \frac{z^4 R^2 2\pi}{2h^2} \right\} = \rho \left\{ R^4 h \frac{\pi}{20} + \frac{R^2 h^3 2\pi}{10} \right\}$$

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \left\{ \frac{R^4 h \pi}{20} + \frac{R^2 h^3 2\pi}{10} \right\} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5}$$

og sama niðurstaða fyrir I_{22}

Um massamiðju

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{zR}{h}} r\,dr\, z = \frac{3}{4} h$$

því breytast I_{11} og I_{22}

$$J_{11} = I_{11} - M\left\{\frac{3}{4}h\right\}^2 = I_{11} - \frac{9}{16} M h^2$$

$$= \frac{3MR^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5} - \frac{9}{16} M h^2 = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3}{80} M h^2$$

og sama fyrir J_{22}