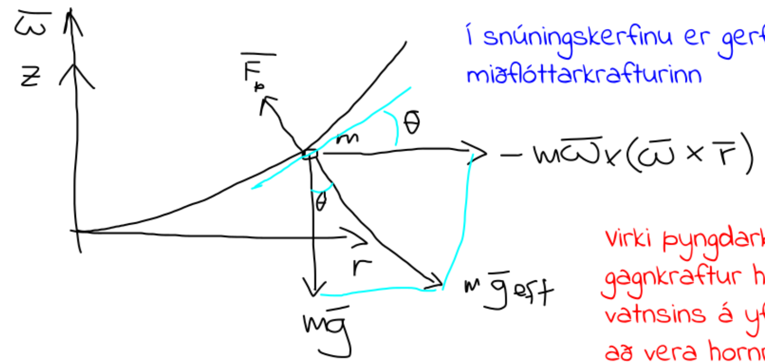
## Dæmi 1

Vatnið og yfirborð þess eru kyrr í viðmiðunarkerfi fötunnar, sem snýst með föstum hraða m.v. tregðukerfi




í snúningskerfinu er gerfikraftur miðflóttarkrafturinn

Virki þyngdarkrafturinn $g_{eff}$ og gagnkraftur hans, þrýstingur vatnsins á yfirborðið $F_p$ verða að vera hornrétt á yfirborðið

Þar sem vatnið er kyrrt í snúningskerfinu hverfur kraftur Coriolis

$$m\bar{a}_{rel} = 0 = \bar{F}_p \underbrace{- m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) + m\bar{g}}_{m\bar{g}_{eff}}$$

$$\rightarrow \quad \bar{g}_{eff} = -g\hat{z} + r\omega^2\hat{r}$$

Hallatalan í hverjum punkti yfirborðsins í fjarlægð r frá miðju er því

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

sem má heilda til að finna hæð yfirborðsins í hverjum r-punkti

$$\boxed{z = \int dr\, \frac{r\omega^2}{g} = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C}$$

fasti

þannig að yfirborðið er fleygbogalagað, og með nógu hröðum snúningi má bera botn fötunnar út frá miðju hennar

## Dæmi 2

Skoðum eiginleika $L = e^{\gamma t}\left\{\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right\}$

① $$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad -kqe^{\gamma t} - \frac{d}{dt}\left\{e^{\gamma t}m\dot{q}\right\} = 0$$

$$-kqe^{\gamma t} - \gamma m\dot{q}e^{\gamma t} - e^{\gamma t}m\ddot{q} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0}$$

sem er hreyfijafnan fyrir deyfðan hreintóna sveifil ef $\gamma > 0$. Athyglisvert er líka að L verður venjulega fall Lagrange fyrir kerfið ef $\gamma$ hverfur

② Athugum hvað gerist við breytuskiptin $q \rightarrow e^{-\gamma t/2}x$

Hvernig lítur hreyfilýsingin út fyrir breytuna x?

$$\dot{q} = -\frac{\gamma}{2}e^{-\gamma t/2}x + e^{-\gamma t/2}\dot{x} = e^{-\gamma t/2}\left\{\dot{x} - \frac{\gamma x}{2}\right\}$$

$$\rightarrow L = \frac{m}{2}\left[\dot{x} - \frac{\gamma x}{2}\right]^2 - \frac{k}{2}x^2$$

$$= \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - \gamma\dot{x}x + \frac{\gamma^2x^2}{4}\right] - \frac{k}{2}x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad -kx - \frac{m}{2}\gamma\dot{x} + \frac{m}{2}\frac{\gamma^2}{2}x - \frac{d}{dt}\left\{m\dot{x} - \gamma x\frac{m}{2}\right\} = 0$$

ekki mjög kunnulegt enn, en höldum áfram

5

$$\to -\frac{k}{m}x - \cancel{\frac{1}{2}\gamma\dot{x}} + \frac{\gamma^2}{4}x - \ddot{x} + \cancel{\frac{\gamma}{2}\dot{x}} = 0$$

$$\to \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{\gamma^2}{4}x = 0$$

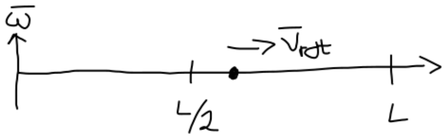
eða

$$\boxed{\ddot{x} + \left\{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^4}{4}\right\}x = 0}$$

sem er nákvæmlega hreyfijafna vandeyfðs hreintóna sveifils með hliðraða horntíðni vegna deyfingarinnar. Sýnt hefur verið að þetta fall Lagrange er ekki einhlítt og til eru önnur L sem hafa ekki rétt markgildi þegar deyfingin hverfur. L er háð tíma og því eru veruleg vandkvæði á að útbúa fall Hamiltons H, með heppilega eiginleika. Sömu vandræði eru innan skammtafræði. Opin kerfi eru allt í kringum okkur, en þeim þarf að lýsa á annan hátt.

6

## Dæmi 3




$\bar{\omega}\times\bar{r}$: ⊗

$-\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$: $\to$

Í snúningskerfinu

$$\boxed{m\bar{a}_{rot} = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2m\bar{\omega}\times\bar{v}_{rot}}$$

sleppum þyngdar hröðun g

miðflóttakraftur

kraftur Coriolis

$-\bar{\omega}\times\bar{v}_{rot}$: ⊙

Enginn viðnámskraftur

$m\ddot{r} = m\omega^2 r$ fyrir perluna á stönginni

$\to \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$ hreyfijafna perlunnar á stönginni

7

Hreyfijafnan hefur almennu lausnina

Hér sést ástæða vinsælda slöngvivopna í fornöld

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$r(0) = \frac{L}{2} \to A + B = \frac{L}{2}$$

$$\dot{r}(0) = 0 \to \omega(A - B) = 0 \to A = B$$

og lausnina má skrifa sem

$$\boxed{r(t) = \frac{L}{2}\cosh(\omega t)} \qquad \boxed{v(t) = \omega\frac{L}{2}\sinh(\omega t)}$$

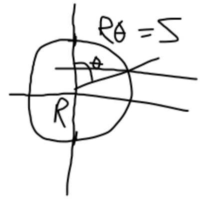
Perlan fer af stönginni þegar $t = t_f$

$$r(t_f) = \frac{L}{2}\cosh(\omega t_f) = L \to \boxed{t_f = \frac{1}{\omega}\mathrm{ArCosh}(2)}$$

8

## Dæmi 4

Engin loftmótstaða, eldflaug frá N-skauti beint suður í lítilli hæð miðað við R




$$v = 6{,}5 \text{ km/s}$$

$$\omega_J = 7{,}27\times10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$R = 6370 \text{ km}$$

Notum fast hnitakerfi sem jörðin snýst í. Þá er geigun

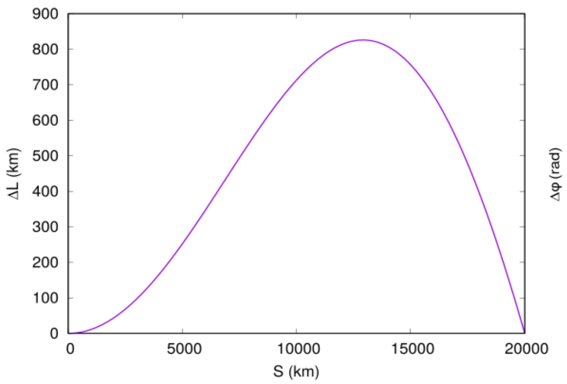
$$\boxed{\Delta L = \omega_J R\sin\theta\cdot T}, \quad T \text{ er flugtími}$$

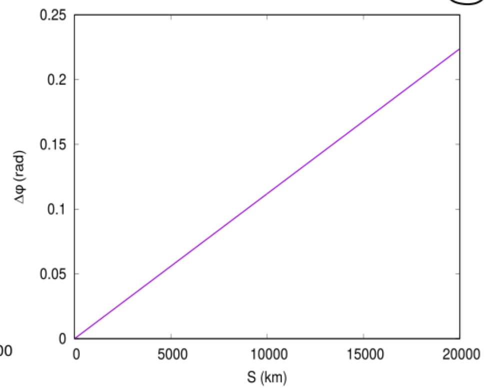
$$\boxed{= \omega_J R\sin\left(\frac{S}{R}\right)\frac{S}{v}}$$

Horngeigun

$$\boxed{\Delta\phi = \left\{\frac{\Delta L}{2\pi R\sin\theta}\right\}2\pi = \omega_J T = \omega_J\frac{S}{v}}$$

9




vegna kúlulögunar jarðar vex lengdargeigunin fyrst og minnkar svo, takið eftir hvar hámarkið er. Eðlilega sést þessu hegðun ekki í horngeigunni vegna eigin-leika kúluhnitakerfisins