1

Dæmi 1 Ögn rennur viðnámslaust eftir ferlinum $z = z_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$

(1) Skorðunum er lýst með fallinu $g(x,z) = z - z_0\{\cosh(\alpha x)-1\} = 0$, þær eru heilnefndar (holonomic)

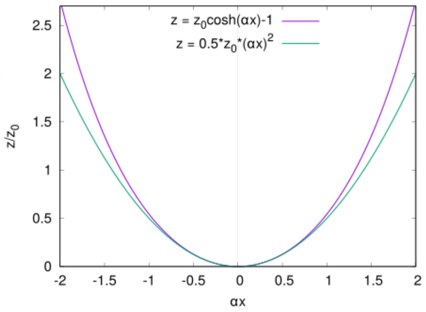
(2) Hreyfijöfnur Lagrange. Byrjum á falli Lagrange, með skorðunum inniföldum, notum Kartísk hnit

$$\bar{v} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{z}\hat{e}_z \;\longrightarrow\; v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}^2\{1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\}$$

því $\dot{z} = \alpha z_0 \dot{x}\sinh(\alpha x)$

$$U = mgz = mgz_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$$

Stöðuorkan U er sýnd hér til hliðar í samanburði við lægstu nálgun fyrir lágt αx, sem við notum síðar



2

Fall Lagrange er þá

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] - mgz_0\{\cosh(\alpha x)-1\}$$

Hér er aðeins eitt alhnit eftir, x. Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{m}{2}\dot{x}^2(\alpha z_0)^2\alpha\, 2\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) - mg\alpha\sinh(\alpha x)z_0 - \frac{d}{dt}\left\{m\dot{x}\left(1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right)\right\} = 0$$

eða

$$m\dot{x}^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) - mg\alpha\sinh(\alpha x)z_0 - m\ddot{x}\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] - 2m\dot{x}^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$$

3

Tiltekt gefur hreyfijöfnuna

$$\ddot{x}\left\{1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right\} + g\alpha z_0\sinh(\alpha x) + \dot{x}^2\alpha(\alpha z_0)^2\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$$

(2) Notum margfaldara Lagrange við útleiðsluna

$$L = \frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\} - mgz$$

Við erum því með tvö alhnit, x og z, og jöfnur Lagrange verða

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

með skorðunum

$$g(x,z) = z - z_0\cosh(\alpha x) + z_0 = 0$$

4

Hreyfijöfnurnar verða nú

$$-m\ddot{x} - \alpha z_0\sinh(\alpha x)\lambda = 0 \quad (*)$$

$$-mg - m\ddot{z} + \lambda = 0$$

Skorðurnar gefa

$$\dot{z} - \alpha\dot{x}z_0\sinh(\alpha x) = 0$$

$$\ddot{z} - \alpha z_0\ddot{x}\sinh(\alpha x) - (\alpha\dot{x})^2 z_0\cosh(\alpha x) = 0$$

$$\lambda = mg + m\alpha z_0\ddot{x}\sinh(\alpha x) + m(\alpha\dot{x})^2 z_0\cosh(\alpha x) \quad (**)$$

$$\ddot{x}\left[1+(\alpha z_0)^2\sinh^2(\alpha x)\right] + g\alpha z_0\sinh(\alpha x) + \dot{x}^2(\alpha z_0)^2\alpha\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x) = 0$$

Sem er sama hreyfijafna og áður

5

4 Umskrifum λ sem fall af x og $\dot{x}$, notum (*) --> (**)

$$\lambda = mg - (\alpha z_0)^2 \sinh^2(\alpha x)\lambda + m\dot{x}^2\alpha^2 z_0 \cosh(\alpha x)$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{m\left[g + (\dot{x}\alpha)^2 z_0 \cosh(\alpha x)\right]}{\left\{1 + (\alpha z_0)^2 \sinh^2(\alpha x)\right\}}}$$

5 Alkraftarnir eru

$$Q_x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\alpha z_0 \sinh(\alpha x)\, m\left\{g + (\dot{x}\alpha)^2 z_0 \cosh(\alpha x)\right\}}{\left\{1 + (\alpha z_0)^2 \sinh^2(\alpha x)\right\}}$$

$$Q_z = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = \lambda$$

Takið eftir að Q_x hverfur þ. $x=0$, og $Q_z = mg + m(\dot{x}\alpha)^2 z_0$ þ. $x=0$. Q_x er oddstætt $x=0$, Q_z er jafnstætt um $x=0$

6

6 Smáar sveiflur: $\alpha x \ll 1$

Leiðum hreyfijöfnuna

$$\ddot{x}\left\{1 + (\alpha z_0)^2(\alpha x)^2\right\} + g(\alpha z_0)(\alpha x) + \dot{x}^2(\alpha z_0)^2 \alpha x \simeq 0$$

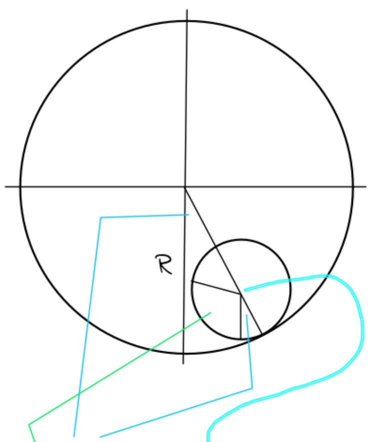
$$\longrightarrow \ddot{x} + g(\alpha z_0)(\alpha x) \simeq 0$$

$$\longrightarrow \omega^2 = (g\alpha z_0 \alpha) \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{g\alpha^2 z_0}}$$

og strax sést að víddin fyrir horntíðni sveiflunnar er rétt.

7

Dæmi 2



1 $a < R$ svo að sívalningurinn velti

2 Veltuhornið α þarf alltaf að mæla frá sömu lóðlínu, milli lóðlínunnar og geisla að snertipunkti myndast hornið θ, því fást skorðurnar

$$R\theta = a\theta + a\alpha = a\{\theta + \alpha\}$$

því má skrifa skorðufall sem

$$\boxed{g(\theta,\alpha) = R\theta - a[\theta + \alpha]}$$

θ: Horn CM og snertipunkts frá lóðlínu

α: horn veltu frá lámarki að lóðlínu

3 Miðað við þessa stikun eru hornin θ og α heppileg alhnit

8

4 Finna fall Lagrange $L = T - U$

$$T = T_{CM} + T_{rot} = \frac{M}{2}\left\{(R-a)\dot{\theta}\right\}^2 + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2, \quad I = \frac{M}{2}a^2$$

$$U(\theta) = Mg\left[R - (R-a)\cos\theta\right]$$

þannig að

$$U(0) = Mga$$
$$U\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = MgR$$
$$U(\pi) = Mg(2R - a)$$

stöðuorka CM miðað við að o-ið sé sett í lægsta punkt rennunnar

Fall Lagrange verður því

$$\boxed{L = \frac{M}{2}\left\{(R-a)\dot{\theta}\right\}^2 + \frac{M}{4}(a\dot{\alpha})^2 - Mg\left[R - (R-a)\cos\theta\right]}$$

(5) Notum skorðufallið, því eru jöfnur Euler-Lagrange

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned}}$$

því fást

$$-Mg(R-a)\sin\theta - M(R-a)^2\ddot\theta + \lambda(R-a) = 0$$

$$-\frac{M}{2}a^2\ddot\alpha - \lambda a = 0$$

eða

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot\theta + \frac{g}{R-a}\sin\theta - \frac{\lambda}{M(R-a)} &= 0 \\ \ddot\alpha + \frac{2\lambda}{Ma} &= 0 \end{aligned}}$$

Seinni hreyfijafnan gefur

$$\ddot\alpha = -\frac{2\lambda}{Ma} \longrightarrow \lambda = -\frac{Ma}{2}\ddot\alpha$$

sem má umskrifa með skorðuskilyrðunum g

$$\lambda = -\frac{Ma}{2}\frac{(R-a)}{a}\ddot\theta$$

sem má nota í fyrri hreyfijöfnunni, sem þá verður

$$\ddot\theta\left[1 + \frac{1}{2}\right] + \frac{g}{(R-a)}\sin\theta = 0$$

eða

$$\ddot\theta + \frac{2g}{3(R-a)}\sin\theta = 0$$

(6) því er ljóst að smáar sveiflur munu hafa horntíðnina

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

$R > a$, sérstöðupunktur þegar a nálgast R

Dæmi 3 Ögn í 2D sléttu í mættinu $U(r) = -k/r^2$

Þá er fall Lagrange

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot r + (r\dot\theta)^2\right) + \frac{k}{r^2}}$$

Pólhnit eðlileg, miðlægt mætti

Jöfnur Euler-Lagrange eru

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

og leiða til hreyfijafna

$$-\frac{2k}{r^3} + mr\dot\theta^2 - \frac{d}{dt}(m\dot r) = 0 \longrightarrow \ddot r - r\dot\theta^2 + \frac{2k}{mr^3} = 0$$

$$-\frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta) = 0 \longrightarrow mr^2\dot\theta = \text{fasti} \equiv \ell$$

ℓ er hverfiþungi

Notum seinni hreyfijöfnuna í þá fyrri

$$\ddot r - \frac{\ell^2}{m^2 r^3} + \frac{2k}{mr^3} = 0$$

Margföldum með tímaafleiðunni af rm

$$m\dot r\ddot r - \frac{\dot r\ell^2}{mr^3} + \frac{2k\dot r}{r^3} = 0$$

umritum

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2}\right] = 0$$

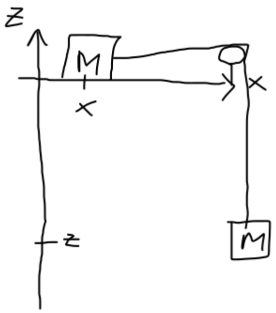
$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left[T + U\right] = 0}$$

Heildarorkan er því varðveitt

Munum að

$$\frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{m^2r^4\dot\theta^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}r^2\dot\theta^2 = \frac{m}{2}(r\dot\theta)^2$$

Dæmi 4



því er $x > 0$
$z < 0$

Meira máli skiptir þó að

$$\boxed{\dot{x} = -\dot{z}}$$

Þyngdarkraftur verkar á M, en verður að hraða 2M

Fall Lagrange verður því

$$L = \frac{M}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - Mgz = M\dot{z}^2 - Mgz$$

Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \longrightarrow -Mg - 2M\ddot{z} = 0$$

eða

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{g}{2} = 0} \longrightarrow z(t) = c_1 + c_2 t - \frac{1}{4} g t^2$$

$z(0) = 0$
$\dot{z}(0) = 0$

$$\boxed{z = -\frac{1}{4} g t^2}$$