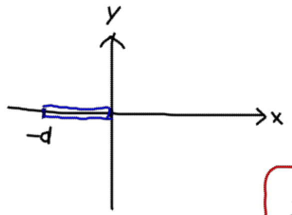
(1)

Dæmi 1

(1) Þyngdarmættið $\Phi(\bar r) = -G\int d^3r' \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r - \bar r'|}$, $\rho = \frac{M}{d}$



viljum reikna það á öllum y-ásnum
(einfalt væri að reikna það í allri sléttunni)

$\bar r = (0,y)$, $\bar r' = (x',0)$

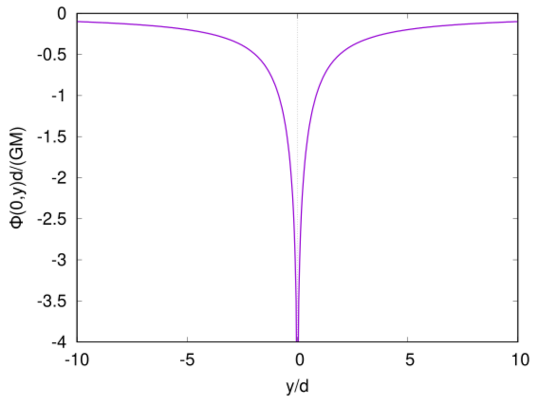
$$\rightarrow \boxed{\Phi(y) = -\frac{GM}{d}\int_{-d}^{0} \frac{dx'}{\sqrt{(0-x')^2+(y-0)^2}}}$$

$$= -\frac{GM}{d}\int_{-d}^{0} \frac{ds}{\sqrt{s^2+y^2}} = \boxed{-\frac{GM}{d}\,\mathrm{ArSinh}\left(\frac{d}{|y|}\right)}$$

(2)

Ágætt er að muna að $-\mathrm{ArSinh}\left(\frac{d}{|y|}\right) = -\ln\left[\frac{d}{|y|} + \sqrt{\left(\frac{d}{y}\right)^2+1}\right]$

Mættið á y-ásnum er ágætt að skoða á grafi



Þyngdarmættið stendur alltaf fyrir aðdráttarkraft

(2) Þyngdarsviðið með beinni heildun (venjulega forðumst við þá leið)

$$\bar g(\bar r) = -G\int_{-d}^{0} \frac{\rho(\bar r')\,d^3r'}{|\bar r-\bar r'|^2}\frac{(\bar r-\bar r')}{|\bar r - \bar r'|},$$

Notum síðan $\bar r - \bar r' = (-x', y)$

(3)

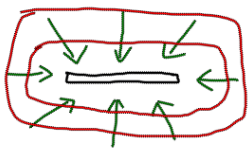
Því fæst $\bar g(0,y) = -G\frac{M}{d}\int_{-d}^{0} ds \frac{1}{s^2+y^2}\frac{(-s,+y)}{\sqrt{s^2+y^2}}$

Greinum vigurþættina í sundur

$$g_x = -G\frac{M}{d}\int_{-d}^{0} \frac{-s\,ds}{(s^2+y^2)^{3/2}} = +\frac{GM}{d}\left\{\frac{1}{\sqrt{y^2+d^2}} - \frac{1}{|y|}\right\}$$

$$g_y = -\frac{GMy}{d}\int_{-d}^{0} \frac{ds}{(s^2+y^2)^{3/2}} = -G\frac{M}{d}\,y\left[\frac{d\sqrt{y^2+d^2}}{y^4+(dy)^2}\right]$$

(3)

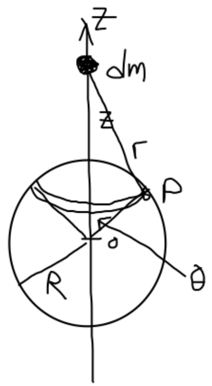


(4) Ekki er til nein einföld samhverfa til að finna jafnþyngdarferla

(4)

Dæmi 2

Í P er mættið vegna dm



$$d\Phi = -G\frac{dm}{r} = -G\frac{dm}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}$$

Finnum meðaltalið yfir allt kúluyfirborðið

$$\langle d\Phi\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}\left\{-G\,dm\int \frac{d\Omega}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\left\{-G\,dm\,2\pi\int_0^\pi d\theta\, \frac{R^2\sin\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\cos\theta}}\right\}$$

Breytuskipti $x=\cos\theta$

$$\boxed{\langle d\Phi\rangle = -G\frac{dm}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{z^2+R^2-2Rzx}} = -G\frac{dm}{z}}$$

Meðaltalið yfir yfirborðið er því mættið í miðju kúluyfirborðinu

5

Dæmi 3

Finna útgildi $J(x) = \int_1^2 dt \, \frac{\dot{x}^2}{t^2}$, með $x(1) = 1$, $x(2) = 7$

Fellið J(x) er skilgreint sem heildi yfir

$$f(x,\dot{x},t) = \left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^2$$

Erum að leita að falli x(t) sem gefur útgildi á J[x], notum enga stika eða fallagrunn

Útgildið finnst með afleiðujöfnu Euler og Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t^2}\dot{x}\right) = 0 \longrightarrow -2\frac{2}{t^3}\dot{x} + \frac{2}{t^2}\ddot{x} = 0$$

$$\longrightarrow -4\frac{\dot{x}}{t} + 2\ddot{x} = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{2\dot{x}}{t}}$$

6

Umritum

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{2}{t}\dot{x} \longrightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{2}{t}dt$$

Heildum óákveðið

$$\ln(\dot{x}) = 2\ln(t) + A' \longrightarrow \dot{x} = \exp[2\ln(t) + A'] = At^2$$

því fæst

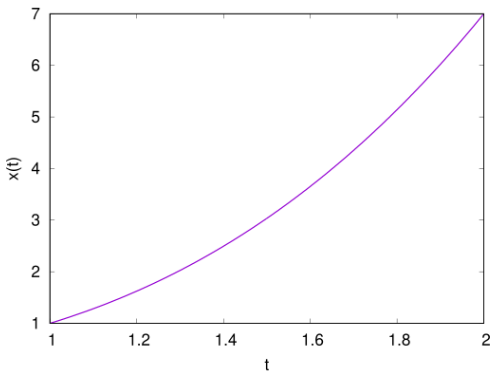
$$\frac{dx}{dt} = At^2 \longrightarrow dx = At^2 dt \longrightarrow \boxed{x = A\frac{t^3}{3} + B}$$

þar sem A og B eru fastar sem ákveðast af upphafsskilyrðunum

$$\left.\begin{aligned} x(1) &= \frac{A}{3} + B = 1 \\ x(2) &= A\frac{8}{3} + B = 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \frac{18}{7} \\ B &= \frac{1}{7} \end{aligned}}$$

7

Ég kann betur við táknunina J[x] til að undirstrika að J er felli af ferlinum x(t). J er því ekki fall af x-i í hefðbundnum skilningi



Ferillinn x(t) í (t,x)-sléttunni gefur útgildi fyrir heildið af

$$\left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^2$$

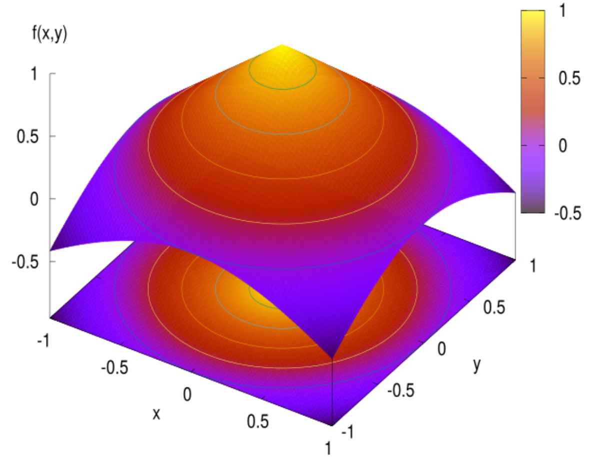
milli markanna t=1 og 2.

Útgildið er einkvæmt ákvarðað fyrir t á bilinu [1,2] því er útgildið víðvært innan þess bils

8

Dæmi 4

Skoðum yfirborðið $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$



Finnum stystu leið frá (0,-1) til (0,1) eftir yfirborðinu

9

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} = 1 - \rho = z$$

Reynum sívalningshnit

$$x = \rho\cos\phi \;\rightarrow\; dx = -\rho\sin\phi\cdot d\phi + d\rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi \;\rightarrow\; dy = \rho\cos\phi\cdot d\phi + d\rho\sin\phi$$

$$d\bar{s} = d\rho\cdot\hat{\rho} + \rho\, d\phi\cdot\hat{\phi} + dz\cdot\hat{z}$$

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho\, d\phi)^2 + (dz)^2} = \sqrt{2(d\rho)^2 + (\rho\, d\phi)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2}\, d\phi = \sqrt{2 + \left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2}\, d\rho$$

10

Veljum fyrst ρ sem óháðu breytuna, og notum Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'}\right) = 0 \qquad \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}$$

(Hér er f fallið undir s-heildinu)

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\rho^2\phi'}{\sqrt{2 + (\rho\phi')^2}}\right\} = 0} \;\rightarrow\; \frac{\rho^2\phi'}{\sqrt{2+(\rho\phi')^2}} = C$$

sem þýðir að

C: heildunarfasti

$$\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \pm\frac{2C}{\rho\sqrt{\rho^2 - C^2}} \quad (*)$$

Þetta má heilda sem

$$\boxed{\phi = \sqrt{2}\,\arcsin\left(\frac{C}{\rho}\right) + B}$$

vegna eiginleika arcsin(x) er erfitt að ákvarða stuðlana C og B

B: heildunarfasti

11

Skoðum líka lausn þegar ϕ er óháða breytan. Hún kemur ekki fyrir í heildinu svo við notum heildisham jöfnu Euler-Lagrange

$$\boxed{f - \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \rho'} = D}$$

← heildunarfasti (Hér er f fallið undir s-heildinu)

Því fæst

$$\sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2} - \frac{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}{\sqrt{2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2}} = D$$

setjum í annað veldi

$$2(\rho')^2 + \rho^2 - 4(\rho')^2 + \frac{4(\rho')^4}{2(\rho')^2 + \rho^2} = D^2$$

einföldum

$$\rho^4 = D^2\left\{2(\rho')^2 + \rho^2\right\} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{\rho^4}{D^2} - \rho^2 = 2(\rho')^2}$$

12

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\phi} = 0$$ gefur lágmark fyrir ρ, ρ_{min}

$$\rightarrow \rho_{min} = D$$ og vegna (*) fæst $C = \rho_{min}$

Reiknum vegalengdina eftir slóðinni

$$S = \int d\phi\sqrt{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} = \int d\phi\sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{D^2} - \rho^2}$$

$$= \int d\phi\,\frac{\rho^2}{D} = \int\left|\frac{d\phi}{d\rho}\right| d\rho\,\frac{\rho^2}{D} = \int\left|\frac{d\phi}{d\rho}\right| d\rho\,\frac{\rho^2}{\rho_{min}}$$

$$= \sqrt{2}\int \rho\, d\rho\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{min}^2}} = 2\sqrt{2}\int_{\rho_{min}}^{1}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{min}^2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \rho_{min}^2}$$

En við verðum að ákveða ρ_{min} með jaðarskilyrðunum

(13)

Lausnin
$$\phi = \sqrt{2}\,\arcsin\left(\frac{\rho_{min}}{\rho}\right) + B$$
þarf að fara í gegnum
$$(1, -\tfrac{\pi}{2}, 0) \quad \text{og} \quad (1, \tfrac{\pi}{2}, 0)$$
Þetta gefur tvær jöfnur
$$-\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\arcsin(\rho_{min}) + B \longrightarrow -\sin\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right\} = \rho_{min}$$
$$+\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\arcsin(\rho_{min}) + B \longrightarrow \sin\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right\} = \rho_{min}$$
Eina leiðin til að uppfylla þessar kröfur er að $B = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

því þá verða báðar jöfnurnar
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \rho_{min}}$$

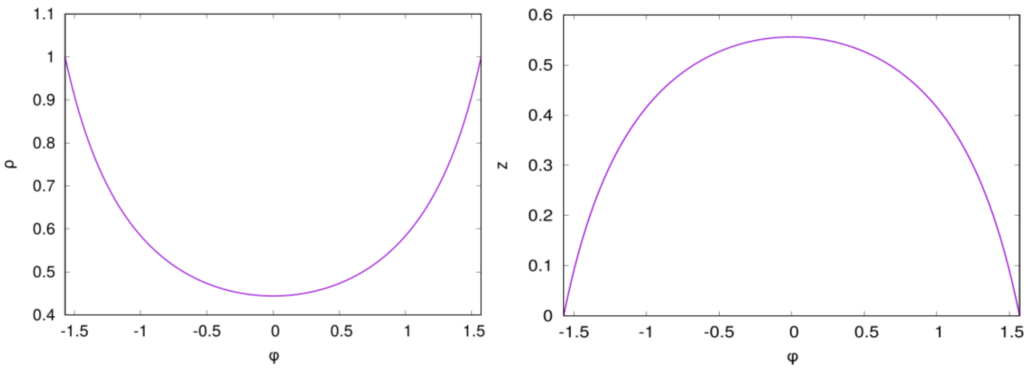
(14)

Stystu leiðinni yfir keiluna frá gefnu punktunum er því lýst með
$$\boxed{\phi = \sqrt{2}\,\arcsin\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)}{\rho}\right] - \frac{\pi}{\sqrt{2}}}\ , \quad z = 1 - \rho$$
og lengd hennar er
$$\boxed{S = 2\sqrt{2}\,\sin\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right] \approx 2{,}5343}$$
og

$S > 2$ Beina línan milli punktana

$S < \pi$ lárétti hálfboginn milli punktana

Gröf segja söguna betur



Slóðin liggur hvorki í kringum keiluna eftir láréttum hálfboga, né yfir topppunkt hennar