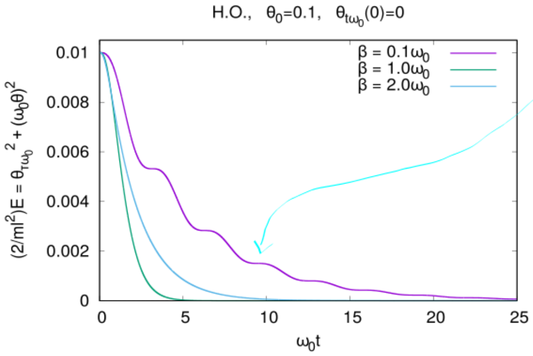
1

Dæmi 1 1D, undirdeyfður línulegur sveifill í gang klukka t=0

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2, \quad k = m\omega_0^2$$

$$x(t) = A\, e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\, \mathrm{Cos}(\omega_1 t + \beta), \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2$$

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\omega_1 \mathrm{Sin}(\omega_1 t - \beta) + \frac{\Gamma}{2}\mathrm{Cos}(\omega_1 t - \beta)\right]$$



Rifjum upp, að orkutapið er flókið fall af tíma innan hverrar lotu þ.s. hraðinn innan lotu er breytilegur

En hér viljum við reikna meðal orkutapið yfir lotu

2

$$\langle E(t)\rangle = \left\langle \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2(t)\right\rangle$$

$$= A^2 e^{-\Gamma t}\left\langle \left[\left(\omega_1 \mathrm{Sin} B + \frac{\Gamma}{2}\mathrm{Cos} B\right)^2 \frac{m}{2} + \omega_0^2 \mathrm{Cos}^2 B \cdot \frac{m}{2}\right]\right\rangle$$

með

$$B = (\omega_1 t + \beta)$$

og við leyfum okkur að taka aðeins tíma meðaltal yfir eina lotu af lotubundnum liðum

$$\langle E(t)\rangle = A^2 e^{-\Gamma t}\Big\langle \Big[\omega_1^2 \mathrm{Sin}^2 B \cdot \frac{m}{2} + \omega_0^2 \mathrm{Cos}^2 B \cdot \frac{m}{2} + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \mathrm{Cos}^2 B \cdot \frac{m}{2} + \omega_1 \Gamma\, \mathrm{Sin} B\, \mathrm{Cos} B \cdot \frac{m}{2}\Big]\Big\rangle$$

Síðan tínum við saman meðaltölin

vitum að orkan fellur með veldisvísisfalli og gætum því hugsað okkur meðaltalið af $e^{+\Gamma t} E(t)$

3

$$\langle \mathrm{Sin}^2 B\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \mathrm{Sin}^2(\omega_1 t + \beta), \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$= \frac{\omega_1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} dt\, \mathrm{Sin}^2(\omega_1 t + \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du\, \mathrm{Sin}^2(u+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}$$ óháð β þar sem fallið er lotubundið

Sama svar fæst fyrir $\cos^2(B)$, en fyrir blandaða liðinn $\sin B * \cos(B)$ fæst 0
því fæst

$$\boxed{\langle e^{\Gamma t} E(t)\rangle = \frac{A^2 m}{4}\left\{\omega_1^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \omega_0^2\right\} = E_0}$$

4

Algengt er að rekast á tvenns konar skilgreiningar á gæðastuðli Q, tap á radíana:

$$Q = \frac{E_0 e^{-\Gamma t}}{|\Delta E|},$$ með ΔE tap á radíana

$$\Delta E = \frac{d\left[e^{-\Gamma t}\langle e^{\Gamma t} E(t)\rangle\right]}{d(t\omega_1)} = -\frac{\Gamma}{\omega_1} e^{-\Gamma t} E_0$$

og því

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{\Gamma}}$$

því verður Q hærra eftir því sem tapið er minna

Önnur algeng leið til að meta Q er að spyrja um tapið á lotu í stað á radíana. Það eru 2π radíanar í lotu svo þá fengist

$$\boxed{Q = \frac{\omega_1}{2\pi\Gamma} = \frac{f_1}{\Gamma}}$$

Fleiri skilgreiningar eru til

Dæmi 2

Þvingaður ódeyfður línulegur sveifill er athyglisvert kerfi

(1) $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \theta(t) F_0 \sin(\omega t)/m$$

$x(0) = 0$
$v(0) = 0$
$\theta(t)$: Heaviside þrepafall

Finnum lausn, fyrir óhliðruðu jöfnuna

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

og tökum eina sérstaka lausn fyrir hliðruðu jöfnuna

$$C\sin(\omega t) \longrightarrow \{-m\omega^2 + m\omega_0^2\}C = F_0 \quad (*)$$

(innsetning)

Heildarlausnin er því

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega t)$$

$$0 = B\cos(\omega_0 t) \longrightarrow B = 0$$

$$0 = A\omega_0 + C\omega \longrightarrow A\omega_0 = -C\omega$$

Því fæst

$$A = -\frac{F_0\omega}{m\omega_0}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Lausnin verður því

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0(\omega_0 + \omega)}\left[\frac{\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega}\right]}$$

(2) Markgildið þegar $\omega \longrightarrow \omega_0$

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\left[\frac{\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 - \omega}\right]$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{\omega_0\sin((\omega_0+\delta)t) - (\omega_0+\delta)\sin(\omega_0 t)}{-\delta}\right] = \sin(\omega_0 t) - \omega_0 t\cos(\omega_0 t)$$

og lausnin verður

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left\{\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\right\}}$$

Takið eftir þættinum með línulegum vexti

(3) Hvernig vex orka kerfisins í hermunni án deyfingar?

$$\dot{x} = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left[\omega_0\cos(\omega_0 t) - \omega_0\cos(\omega_0 t) + (\omega_0 t)\omega_0\sin(\omega_0 t)\right]$$

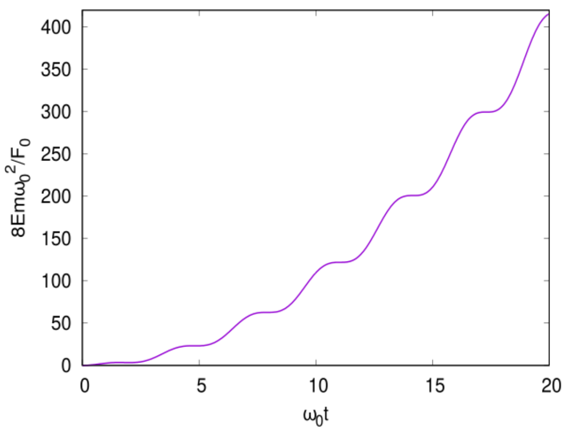
$$= \frac{F_0}{2m\omega_0^2}(\omega_0 t)\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

og orkan verður

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{F_0}{2m\omega_0^2}\right)^2\Big\{(\omega_0 t)^2\omega_0\sin^2(\omega_0 t) + \omega_0^2\left[\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\right]^2\Big\}$$

Að lokum fæst því fyrir orkuna

$$\boxed{E = \frac{F_0^2}{8m\omega_0^2}\left[(\omega_0 t)^2 + \sin^2(\omega_0 t) - 2(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right]}$$



orkan vex í öðruveldi með tímanum, og vöxturinn er í réttu hlutfalli við styrk þvingunarinnar

9

Dæmi 3

Finna lausn á markdeyfðum línulegum sveifli

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = 0}, \quad \text{því} \quad \omega_0^2 = \beta^2$$

(1) Reynum lausn: $x(t) = y(t)e^{-\beta t}$

$$\dot{x} = \dot{y}e^{-\beta t} - \beta y e^{-\beta t} = e^{-\beta t}[\dot{y} - \beta y]$$

$$\ddot{x} = -\beta e^{-\beta t}\{\dot{y} - \beta y\} + e^{-\beta t}\{\ddot{y} - \beta\dot{y}\} = e^{-\beta t}[\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y]$$

Setjum inn í hreyfijöfnuna

$$e^{-\beta t}\left[\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y + 2\beta\dot{y} - 2\beta^2 y + \beta^2 y\right] = 0$$

$\rightarrow \ddot{y} = 0$

með lausn $y = A + Bt$ $\rightarrow$ $\boxed{x(t) = \{A + Bt\}e^{-\beta t}}$

10

(2) Margar aðferðir, reynum ummyndun Laplace

$$\boxed{\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty dt\, f(t)e^{-st} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds\, f(s)e^{st} \end{aligned}}$$

Á vel við föll á bilinu

$t \in [0, \infty)$

Mun koma fyrir í Greiningu III, ágætt að kynnast hér.
Á vel við kerfi með dofnun

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \beta^2 x = 0 \quad \text{varpast í}$$

$$[s^2 x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 2\beta[sx(s) - x(0)] + \beta^2 x(s) = 0$$

Algebraísk jafna með lausn

$$\boxed{x(s) = \frac{\dot{x}(0) + (s + 2\beta)x(0)}{(s + \beta)^2}}$$

11

Ummyndum til baka, ágætt að nota töflur á vef eða wxmaxima

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \dot{x}(0)te^{-\beta t} + \beta te^{-\beta t}x(0) + e^{-\beta t}x(0) \\ &= e^{-\beta t}\{x(0) + t(\dot{x}(0) + \beta x(0))\} \end{aligned}}$$

Við getum tengt við stuðlana A og B í lausninni með hinni aðferðinni

$$x(0) = A$$

$$\dot{x}(0) = -A\beta + B$$

Deyfður sveifill er ekki hreintóna kerfi. Ummyndanir Fouriers eða Laplace gefa okkur til kynna hvaða tíðnir finnast í kerfinu vegna deyfingarinnar

12

Dæmi 4

Deyfður og þvingaður línulegur sveifill, 4. fyrirlestur bls. 8:

Í sístæðu ástandi

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{4}\,\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

$\omega_n = 2^n\omega_0$

$\omega_{-n} = 2^{-n}\omega_0$

$$\langle T \rangle_n = \frac{mA^2}{4}\,\frac{2^{2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 2^{2n}\omega_0^2)^2 + 4\,2^{2n}\omega^2\beta^2}$$

$$\langle T \rangle_{-n} = \frac{mA^2}{4}\,\frac{2^{-2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 2^{-2n}\omega_0^2)^2 + 4\,2^{-2n}\omega^2\beta^2}$$

$$\langle T \rangle_{-n} \cdot \frac{2^{4n}}{2^{4n}} = \frac{mA^2}{4}\,\frac{2^{2n}\omega_0^2}{(\omega_0^2 2^{2n} - \omega_0^2)^2 + 4\,2^{2n}\omega^2\beta^2} = \langle T \rangle_n$$

þannig að $\boxed{\langle T \rangle_{-n} = \langle T \rangle_n}$