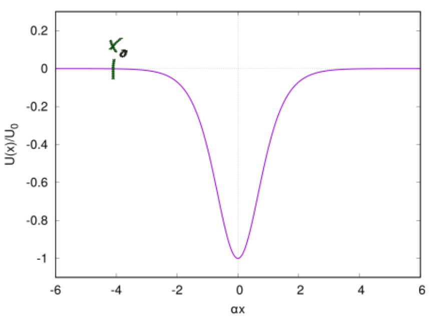
Dæmi 1

Kraftsvið sem lýst er með mættinu U(x)

$$U(x) = -U_0/\cosh^2(\alpha x)$$



1. Búumst við lotubundinni hreyfingu, sveiflu, skoðum
2. Finnum tímann úr kyrrstöðu í x_0 niður í $x=0$, $\tau = t - t_0$

Notum heildarorkuna

$$E = T + V = \frac{m}{2}v^2 + U(x)$$

$$\frac{m}{2}v^2 = E - U(x)$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\{E - U(x)\}$$

og því

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}}$$

og

$$\tau = t - t_0 = -\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_{x_0}^{0}\frac{A\cosh(\alpha x)\,dx}{\sqrt{-\cosh^2(\alpha x) + A^2}}$$

þar sem

$$A = \cosh(\alpha x_0)$$

Takið eftir að stærðan innan rótarinnar er jákvæð, eins og best sést af myndinni. Heildið sjálft er jákvætt þar sem cosh(x) er alltaf jákvætt.

Hægt að heilda beint með GS: 2.462.11, en veljum breytuskipti til að fá heildi sem við þekkjum betur

$$\sinh(\alpha x) = z, \quad \alpha x = \mathrm{ArSinh}\, z$$

$$\cosh(\alpha x) = \cosh\{\mathrm{ArSinh}\, z\} = \sqrt{z^2+1} \longrightarrow \cosh^2(\alpha x) = z^2 + 1$$

Heildið verður því

$$\tau = -\frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\int_{\sinh(\alpha x_0)}^{0}\frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2 - 1}}$$

Notum GS 2.261 með

$$c = -1, \; b = 0, \; a = A^2 - 1$$

$$\Delta = 4ac - b^2 = -4(A^2-1) < 0$$

$$\tau = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left\{\arcsin\left(\frac{-2z}{2\sqrt{A^2-1}}\right)\Bigg|_{\sinh(\alpha x_0)}^{0}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned}\Delta &= -4(A^2-1) = -4\{\cosh^2(\alpha x_0) - 1\} \\ &= -4\sinh^2(\alpha x_0) < 0 \quad \text{ef} \quad x_0 \neq 0\end{aligned}\right\}$$

því fæst

$$\tau = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\{\arcsin(0) - (-\arcsin(1))\} = \frac{A}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\,\frac{\pi}{2}$$

Því er

$$\boxed{\tau = t - t_0 = \frac{A\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}} = \frac{\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\cosh(\alpha x_0)}$$

3. Lota sveiflunar er ferfaldur þessi tími. Hún er því háð útslagi sveiflunnar, öfugt hreintóna sveifil. Lotan nálgast óendanlegt þegar útslagið vex og orkan stefnir á 0.
4. Ef hreyfingin hefst án hraða í x_0, en endar í $x_f \neq 0$ þá fæst

$$\tau' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\left\{-\arcsin\left[\frac{\sinh(\alpha x_f)}{\sinh(\alpha x_0)}\right] + \frac{\pi}{2}\right\}\cosh(\alpha x_0)$$

þessi tími er háður upphafsstaðsetningunni á flókinn hátt en við sjáum hvernig það einfaldast þegar loka staðsetningin er x=0

Dæmi 2

Einvíð hreyfing, viðnámskraftur $f = -mk(v^2 + \beta v)$

Hreyfijafna

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -mk(v^2 + \beta v)}$$

Upphafshraði $v_0 > 0$ í $t = 0$, heildum

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v^2 + \beta v} = -k\int_0^t dt'$$

notum GS 2.118.1 eða maxima

$$\int\frac{dx}{xz_1} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{z_1}{x}\right)$$

$$z_1 = a + bx, \quad a = \beta, \quad b = 1$$

$$-kt = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{v+\beta}{v}\right]\Bigg|_{v_0}^{v(t)}$$

$$= -\frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v(t)+\beta}{v(t)}\right\} + \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{v_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{v_0}\cdot\frac{v(t)}{v(t)+\beta}\right\}$$

5

$$\rightarrow e^{-\beta k t} = \frac{v_0+\beta}{v_0}\,\frac{v(t)}{v(t)+\beta} \rightarrow \frac{v_0}{v_0+\beta}\,e^{-\beta k t} = \frac{1}{1+\beta/v(t)}$$

og

$$\frac{\beta}{v(t)} = \frac{v_0+\beta}{v_0}\,e^{+\beta k t} - 1 \quad \text{eða} \quad \boxed{v(t) = \frac{v_0\beta}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0}}$$

Betra að sannreyna að $v(0) = \dfrac{v_0\beta}{v_0+\beta-v_0} = v_0$

— — — — — — — —

Einnig sést að $v(t\to\infty) \to 0$

Við drögum því þá ályktun að það taki ögnina óendanlegan langan tíma að stöðvast. Það notum við í næsta lið þegar við finnum hve langt ögnin kemst.

6

Finnum vegalengdina sem ögnin kemst

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{v_0\beta}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0} \rightarrow dx = \frac{v_0\beta\,dt}{(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0}$$

sem má heilda sem

$$x = \int_0^t \frac{v_0\beta\,ds}{(v_0+\beta)e^{\beta k s} - v_0} = -\frac{1}{k}\left\{\beta k s - \ln\left[(v_0+\beta)e^{\beta k s} - v_0\right]\right\}\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{k}\left[\beta k t - \ln\left[(v_0+\beta)e^{\beta k t} - v_0\right] + \ln\beta\right]$$

$$= \frac{1}{k}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{\beta}\,e^{\beta k t} - \frac{v_0}{\beta}\right\} - \beta t$$

$$= \frac{1}{k}\ln\left\{e^{\beta k t}\left[\frac{v_0+\beta}{\beta} - \frac{v_0}{\beta}\,e^{-\beta k t}\right]\right\} - \beta t$$

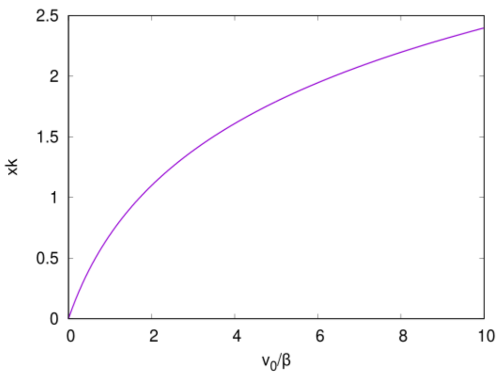
7

Því fæst

$$x(t) = \frac{1}{k}\ln\left\{\frac{v_0+\beta}{\beta} - \frac{v_0}{\beta}\,e^{-\beta k t}\right\}$$

og markgildið

$$\boxed{x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0+\beta}{\beta}\right)} \qquad \text{vídd } [k] = \frac{1}{L}$$

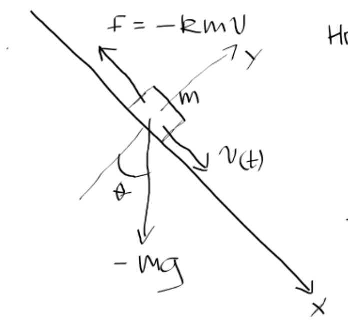


svo ögnin kemst aðeins endanlega lengd á óendanlegum tíma

Hér er ekki hægt að athuga markgildið þegar β stefnir á 0, heildið sem valið var í upphafi leyfir það ekki.

8

Dæmi 3



Skáplan í föstu þyngdarsviði, ögn rennur af stað úr kyrrstöðu, hve langan tíma þarf hún til að fara d

Hreyfijafnan er

$$\boxed{m\ddot{x} = mg\sin\theta - kmv}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta - kv$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dv}{g\sin\theta - kv} = dt}$$

Breytistærðir aðgreindar, heildum, $v(t=0) = v(0) = 0$

$$\int_0^t dt' = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g\sin\theta - kv}$$

hraði agnarinnar mun aukast niður eftir skáplaninu

$$\rightarrow g\sin\theta > kv$$

9

því fæst

$$t = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{g\sin\theta}{g\sin\theta - kv}\right] \;\to\; e^{kt} = \frac{1}{1-\frac{kv}{g\sin\theta}}$$

og

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kv}{g\sin\theta} \;\to\; kv = g\sin\theta\{1-e^{-kt}\}$$

þessa jöfnu má sannreyna fyrir lítið kt

sem má umrita sem

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{g\sin\theta}{k}\{1-e^{-kt}\}} \;\to\; \int_0^d dx = \frac{g\sin\theta}{k}\int_0^t ds\{1-e^{-ks}\}$$

sem leiðir til

$$d = \frac{g\sin\theta}{k}\left\{t + \frac{e^{-kt}}{k} - \frac{1}{k}\right\} \;\to\; (kt+e^{-kt}) = 1 + \frac{k^2 d}{g\sin\theta}$$

10

Umskrifum sem

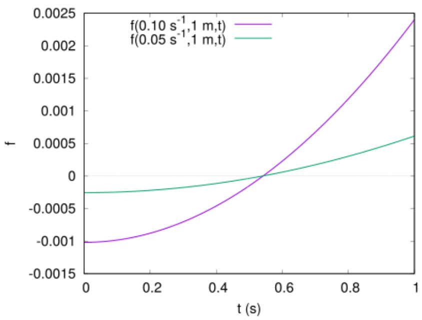
$$\frac{k^2 d}{g} = \{(kt+e^{-kt})-1\}\sin\theta$$

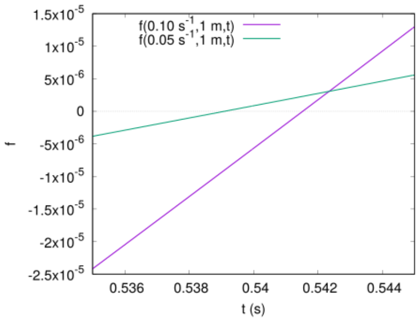
og skilgreinum fall

$$f(k,d,t) = \{(kt+e^{-kt})-1\}\sin\theta - \frac{k^2 d}{g}$$

Veljum

$g = 9.82\,m/s^2$, $\theta = 45^\circ$





11

Eins má nota wxmaxima til að finna núllstöðvarnar, athugum aðeins svarið

$$(kt+e^{-kt}) = 1 + \frac{k^2 d}{g}\frac{1}{\sin\theta}$$

Liðum fyrir lítið kt

$$kt + 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2} + \dots = 1 + \frac{k^2 d}{g\sin\theta}$$

$$\to \boxed{t^2 = \frac{2d}{g\sin\theta}} \quad \text{þegar} \quad kt \to 0$$

Þetta er svarið sem fengist þegar enginn viðnámskraftur væri

12

Dæmi 4 — GS: 2.132.1

Fall úr kyrrstöðu

z

$$F = m\frac{dv}{dt} = mg - m\gamma v^4$$

① Nákvæm lausn, heildum

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{-\gamma v'^4 + g}$$

$$\boxed{t = \frac{\alpha}{4g}\left[\ln\left[\frac{v+\alpha}{v-\alpha}\right] + 2\arctan\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right]}$$

$$\alpha = \left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/4}$$

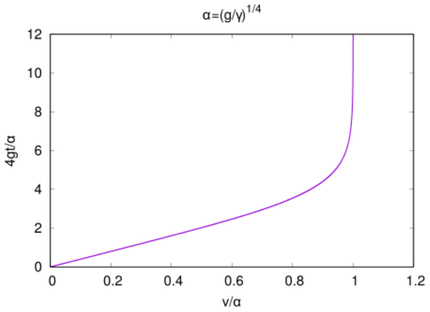
② Markgildi, $\left(\frac{v}{\alpha} \to 0\right)$ $\gamma \to 0$

Erfitt er að kanna markgildið þegar γ stefnir á 0, þar sem heildið var gert með þeim formerkjum að $-g\gamma < 0$, sem er þá ekki uppfyllt. Því bendi ég á næsta lið. Grafið þar sýnir einfalt samband v og t þegar v/α er lítið.

3 Nákvæma lausnin var

$$t = \frac{\alpha}{4g}\left[\ln\left[\frac{v+\alpha}{v-\alpha}\right] + 2\arctan\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right]$$

Já, þetta má lesa úr lausninni með greiningu, en einfaldlega notum graf



Hraðinn vex greinilega ekki endalaust með t, markhraðinn virðist vera

$$\boxed{v_m = \alpha = \sqrt[4]{\frac{g}{\gamma}}} \leftarrow 4$$

5

Markhraðinn lýsir sístæðu ástandi

$$\longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

svo hreyfijafnan verður

$$0 = mg - m\gamma v^4$$

sem gefur nákvæmlega sama markhraðan og í liðnum á undan