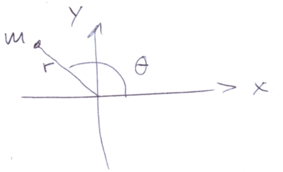
7-4 Ögn í sléttu með krafti $f = -Ar^{\alpha-1}$ að miðju (1)

$A, \alpha > 0$

Vel pólhnit sem alhnit, $\bar{f} = -Ar^{\alpha-1}\hat{e}_r$

$\bar{f} = -\bar{\nabla} U \rightarrow U = \frac{A}{\alpha} r^{\alpha}$

þar sem við veljum að $U(0) = 0$



$$T = \frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\}$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\} - \frac{Ar^{\alpha}}{\alpha}$$

Notum Euler-Lagrange jöfnur til að finna hreyfijöfnur

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad \boxed{q_1 = r,\ q_2 = \theta}$$

(2)

r: $mr\dot{\theta}^2 - Ar^{\alpha-1} - m\ddot{r} = 0$

eða $\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{\alpha-1} = 0}$

θ: $\boxed{-\frac{d}{dt}\{mr^2\dot{\theta}\} = 0}$

Hverfiþunginn

$$\bar{L} = \bar{r}\times\bar{p} = r\hat{e}_r \times \{\bar{p}_r + \bar{p}_\theta\}$$

$$= r\hat{e}_r \times \bar{p}_\theta$$

$$\rightarrow |\bar{L}| = l = r \cdot mr\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

Því er hreyfijafnan fyrir θ staðfesting á að hverfiþunginn sé varðveittur.

Hverfiþunginn er fasti

$\rightarrow mr^2\dot{\theta}^2 = l$: fasti

notum í hreyfij. fyrir r

$$\boxed{m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + Ar^{\alpha-1} = 0}$$

↑ losnum við breytuna $\dot{\theta}$

Margföldum með $\dot{r}$

$$m\ddot{r}\dot{r} - \frac{\dot{r}l^2}{mr^3} + A\dot{r}r^{\alpha-1} = 0$$

(3)

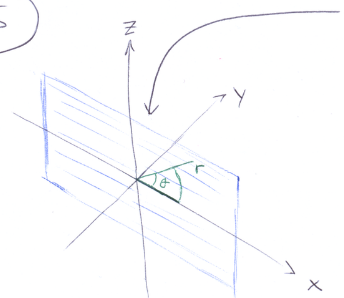
Sjáum að jafnan er heildarafleiða

$$\frac{d}{dt}\Big\{\underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{\alpha}r^{\alpha}}_{T+U=E}\Big\} = 0$$

$T + U = E$

↑ heildarorkan, sem er þá varðveitt

7-5 Ögn hreyfist í lóðréttri sléttu í þyngdarsviði, með kraftinum $f = -Ar^{\alpha-1}$ að miðju í lóðréttu sléttunni



Í sléttunni notum við pólhnit

þ.a. $T = \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\}$

(4)

$U = \frac{A}{\alpha}r^{\alpha} + mgr\sin\theta$ sjá skýringarmynd á síðu (3)

$$\rightarrow \boxed{L = \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\} - \frac{A}{\alpha}r^{\alpha} - mgr\sin\theta}$$

Finnum hreyfijöfnur með Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$

r: $mr\dot{\theta}^2 - Ar^{\alpha-1} - mg\sin\phi - m\ddot{r} = 0$

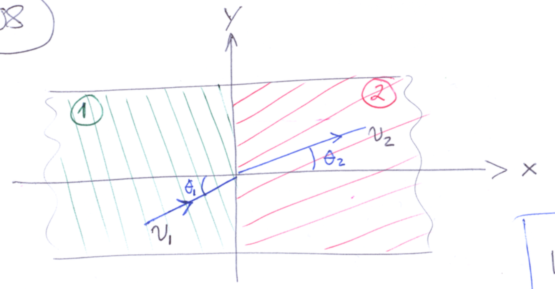
eða $\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{\alpha-1} + mg\sin\theta = 0}$

θ: $\boxed{mgr\cos\theta - \frac{d}{dt}\{mr^2\dot{\theta}\} = 0}$

Hverfiþunginn í lóðréttu sléttunni er ekki varðveittur vegna vogis þyngdarkraftsins

7-08

5



$$U = \begin{cases} U_1 & \text{ef } x<0 \\ U_2 & \text{ef } x>0 \end{cases}$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2+\dot{y}^2\right\} - U(x)}$$

Notum að $U(x) = \theta(x)U_2 + \theta(-x)U_1$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef } x>0 \\ 0 & \text{ef } x<0 \end{cases}$$

↑ þrepafall Heavisides

Ennfremur $\theta'(x) = \delta(x)$

↑ δ-fall Diracs

$$\int_a^b dx\, \delta(x) = 1 \quad \text{ef} \quad a<0<b$$

$$\int_a^b dx\, f(x)\delta(x) = f(0)$$

6

Euler-Lagrange gefur

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{dU}{dx} &= 0 \qquad (1) \\ m\ddot{y} &= 0. \qquad (2) \end{aligned}}$$

Notum að $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}v_x$

Jafna (2) gefur að v_y sé alltaf fasti $\left(m\frac{dv_y}{dt}=0\right)$ líka yfir stilin í $x=0$

Skoðum jöfnu (1) yfir stilin, hún jafngildir

$$m\ddot{x} = -\delta(x)(U_2-U_1) \quad \text{þ.s.} \quad \frac{dU}{dx} = \delta(x)(U_2-U_1)$$

$$\rightarrow \quad v_x\frac{dv_x}{dx} = -\delta(x)\frac{(U_2-U_1)}{m}$$

7

Heildum

$$\int_{v_{x1}}^{v_{x2}} v_x\, dv_x = -\frac{(U_2-U_1)}{m}\int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x)$$

$$\frac{1}{2}\left\{v_{x2}^2 - v_{x1}^2\right\} = -\frac{(U_2-U_1)}{m}$$

eða

$$\frac{m}{2}v_{x1}^2 + U_1 = \frac{m}{2}v_{x2}^2 + U_2 \qquad (3)$$

Jafna (2) leiðir til $m\dot{y}_1 = m\dot{y}_2$, sem má umrita sem

$$\frac{1}{2}mv_{y1}^2 = \frac{1}{2}mv_{y2}^2 \qquad (4)$$

(3) og (4) má leggja saman

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_2 \qquad (5)$$

8

Munum síðan að $mv_{y1} = mv_{y2}$ má umrita sem

$$v_1\sin\theta_1 = v_2\sin\theta_2 \qquad (6)$$

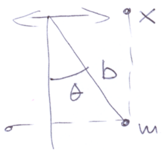
Setjum (6) og (5) saman

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{v_1^2 + (U_1-U_2)\frac{2}{m}}{v_1^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{U_1-U_2}{\frac{m}{2}v_1^2}} = \sqrt{1 + \frac{U_1-U_2}{T_1}}$$

7-16

Einfaldur pendúll hengdur upp í $x = a\sin(\omega t)$



$x = a\sin(\omega t)$, veljum hnitin fyrir m

$$x = a\sin(\omega t) + b\sin\theta$$
$$y = -b\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad \dot{x} = a\omega\cos(\omega t) + b\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y} = b\dot{\theta}\sin\theta$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right\} + mgy$$

því fæst

$$L = \frac{m}{2}\left\{(a\omega)^2\cos^2(\omega t) + 2ab\omega\dot{\theta}\cos(\omega t)\cos\theta + (b\dot{\theta})^2\right\} + mgb\cos\theta$$

Eina rúmvenlega breytan sem eftir er, er θ

Notum Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0$$

$$-\frac{m}{2}2ab\omega\dot{\theta}\cos(\omega t)\sin\theta - mgb\sin\theta - \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}2ab\omega\cos(\omega t)\cos\theta + \frac{m}{2}2b^2\dot{\theta}\right\} = 0$$

$$-ab\omega^2\sin(\omega t)\cos\theta - ab\omega\dot{\theta}\cos(\omega t)\sin\theta + b^2\ddot{\theta} = ab\omega\dot{\theta}\cos(\omega t)\sin\theta - gb\sin\theta$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{b}\sin\theta - \frac{a\omega^2}{b}\sin(\omega t)\cos\theta = 0}$$

Gerum víddarlaust

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2\theta}{d(t\omega)^2} = \ddot{\theta}\cdot\omega^2$$, og notum $t\omega$ sem víddarlausa tímabreytu

því verður hreyfijafnan

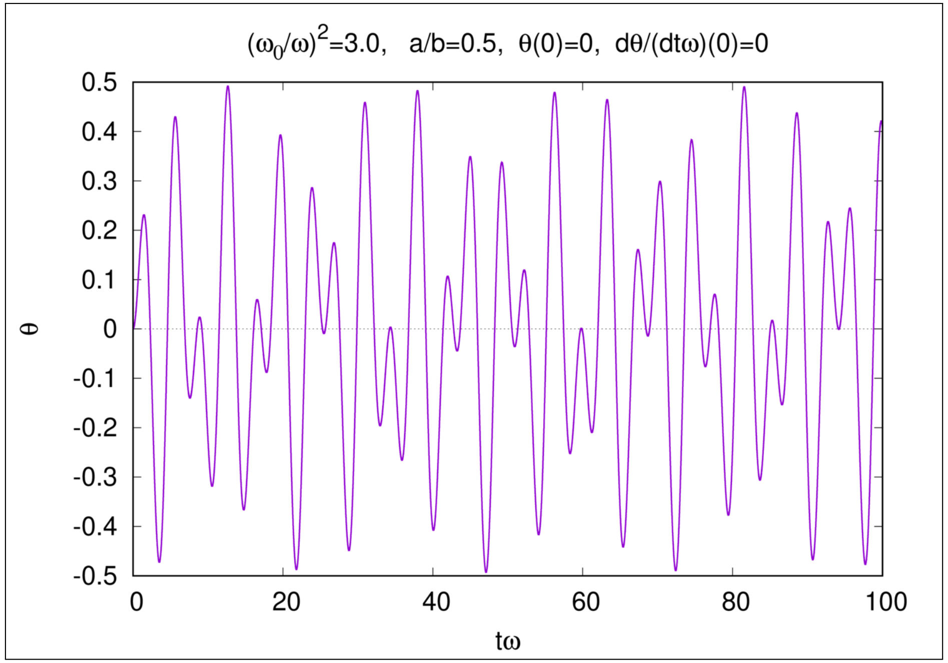
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\sin\theta - \frac{a}{b}\sin(t\omega)\cos\theta = 0$$

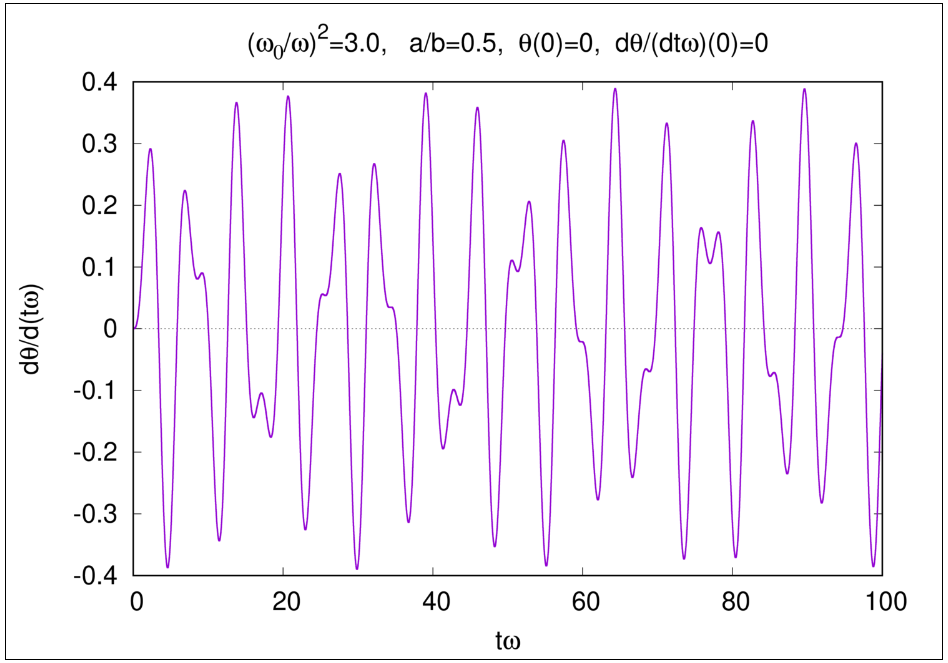
þar sem $\omega_0^2 = \frac{g}{b}$

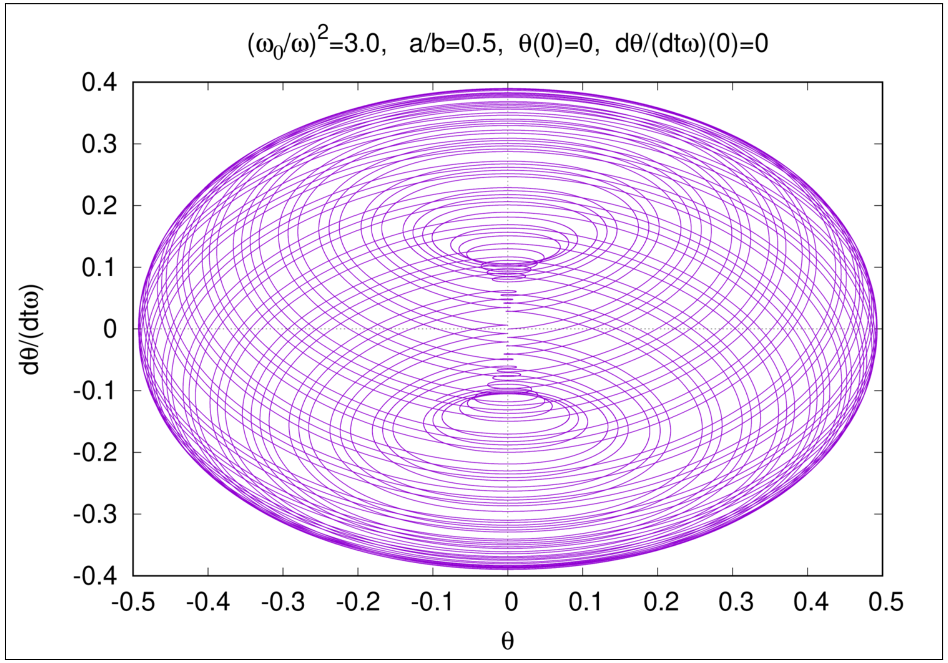
þá eru einu stikarnir eftir $\frac{\omega_0}{\omega}$: hlutfall náttúrulegu hornatíðni pendúlsins og hornatíðni ytri þvingunarinnar

og $\frac{a}{b}$: hlutfall lengdanna

Sjá mynd á næstu þremur síðum



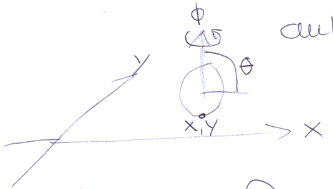




07-01 (15)

Skífa veltur á láréttum fleti

Almennt? Við þurfum t.d. x og y - stöðuhnit auk hornanna θ og φ til að lýsa stöðu hennar algerlega.



Veltuskilyrði: Veltunni og „spunanum" um z-ásinn má lýsa með skorðunum

$$R\,d\theta = dx\cdot\cos\phi + dy\cdot\sin\phi$$

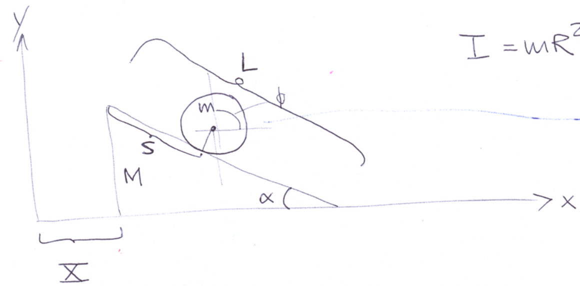
í stefnu ϕ þ.a. $\frac{dy}{dx} = \tan\phi$

Þessi skilyrði er ekki hægt að heilda t.a. finna $f(\theta,\phi,x,y)=0$ (myndu ekki heildarafleiðu) —> nonholonomic

x,y ákvarða ekki θ og φ

7-6 (16)

Gjörð með m og R veltur niður skáplan með M og α m.v. núningslausa sléttu



$I = mR^2$

sjáum að best er að velja upphaf φ þ.a. $S = R\phi$

fyrir massamiðju gjarðar

$$x = \mathbb{X} + S\cos\alpha + R\sin\alpha$$

$$y = R\cos\alpha + (L-S)\sin\alpha$$

Hreyfiorka gjarðar er þá

$$T_g = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{I}{2}\dot\phi^2$$

$$= \frac{m}{2}\left\{(\dot X + \dot S\cos\alpha)^2 + (-\dot S\sin\alpha)^2\right\} + \frac{m}{2}(R\dot\phi)^2$$

Notum $S = R\phi$ til að losa okkur við $\dot\phi$

$$\to T_g = \frac{m}{2}\left\{2\dot S^2 + \dot X^2 + 2\dot X\dot S\cos\alpha\right\}$$

Alhnitin eru í raun X og S

Fyrir skáplanið gildir

$$T_s = \frac{M}{2}\dot X^2$$

Því er heildar hreyfiorkan

$$T = m\dot S^2 + \frac{m+M}{2}\dot X^2 + m\dot X\dot S\cos\alpha$$

Mættisorkan er

$$U = mgy = mg\left\{R\cos\alpha + (L-S)\sin\alpha\right\}$$

og við sjáum að

$$L = T - U = m\dot S^2 + \frac{m+M}{2}\dot X^2 + m\dot X\dot S\cos\alpha - mg\left\{R\cos\alpha + (L-S)\sin\alpha\right\}$$

Tvö alhnit, notum Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = 0$$

til að finna

S:

$$mg\sin\alpha - \frac{d}{dt}\left\{2m\dot S + m\dot X\cos\alpha\right\} = 0$$

$$\to \boxed{2m\ddot S + m\ddot X\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0} \qquad (1)$$

X:

$$-\frac{d}{dt}\left\{2\frac{m+M}{2}\dot X + m\dot S\cos\alpha\right\} = 0$$

$$\to \boxed{(m+M)\ddot X + m\ddot S\cos\alpha = 0} \qquad (2)$$

p.s. jafna (2) er óháð má einangra

$$\left\{2 - \frac{m\cos^2\alpha}{m+M}\right\}\ddot S = g\sin\alpha$$

$$\ddot X = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{2(m+M) - m\cos^2\alpha}$$

þegar $M \to \infty$ stöðvast skáplanið, en gjörðin veltur einfaldlega

og þar

$$\frac{d}{dt}\left\{\underbrace{(m+M)\dot X}_{\text{heildar x-þáttur skriðþunga kerfis}} + \underbrace{m\dot S\cos\alpha}_{\text{x-þáttur skriðþunga gjarðar miðað við skáplan}}\right\} = 0$$

vegna þess að engir kraftar verka í x-átt