Aflfræði (EÐL302G) haustið 2020

Kennarar: Viðar Guðmundsson (prófessor í eðlisfræði; vidar@hi.is).

Kennslubók: Variational Principles in Classical Mechanics, eftir Douglas Cline, endurnýjuð 2. útgáfa, 2019. Bókin er til frjáls á vefnum: http://classicalmechanics.lib.rochester.edu/
Til hliðsjónar: Classical Dynamics of Particles and Systems eftir Thornton & Marion (5. útg. 2004).
Allar upplýsingar um námskeiðið munu birtast á vefsíðu:
https://notendur.hi.is/vidar/Nam/Afl/index.html

Gróf kennsluáætlun og lesefni:

Þáttur	Efni	Kaflar í bók Douglas Cline
1	Hreyfijöfnur	2.2, 2.12.1, 2.12.2, 2.12.5
2	Línulegar sveiflur	3.1 – 3.6, 3.9
3	Ólínulegar sveiflur og ringl	4.1 – 4.6
4	Þyngdarfræði, hnikun	2.14, 2.15, 5.1 – 5.12
5	Euler – Lagrange	6.1 – 6.14
6	Jöfnur Hamiltons	7.1, 7.2, 7.5 – 7.14, 8.1 – 8.5
7	Miðlæg mætti	11.1 –11.7, 11.8 – 11.8.3, 11.9.1, 11.10
8	Agnakerfi	2.8 – 2.10, 2.12.8
9	Hreyfing utan tregðukerfis	12.1 – 12.8, 12.10 – 12.14
10	Aflfræði stjarfhluta	13.1 – 13.12
11	Horn Eulers og hreyfijöfnur	13.13 – 13.23
12	Tengdar Sveiflur	14.1 – 14.9

Skipulag: 2+2 fyrirlestrar og dæmatími einu sinni í viku. Dæmi verða lögð fyrir á miðvikudögum fyrir kl. 17 á vefslóð námskeiðisins: https://notendur.hi.is/vidar/Nam/Afl/index.html

Um er að ræða tímadæmi þar sem nemendur eru hvattir til að reikna upp á töflu (engin skiladæmi). Hver nemandi velur sér dæmahóp sem ber ábyrgð á einu dæmi í hverjum dæmatíma.

Heimapróf: Verður haldið seint í október. Ekki er skylda að taka prófið; nemendur geta valið að gera það ekki og mun þá vægi jólaprófs í lokaeinkunn verða 100%. Á prófinu verða svipuð dæmi og í dæmatímum og á lokaprófi. Nemendur fá nægan próftíma og ætlast er til þess að þeir æfi góðan frágang og framsetningu á tveimur reiknuðum dæmum.
Vægi heimaprófs í lokaeinkunn er 20% til hækkunar.

Jólapróf: Skriflegt þriggja stunda próf. Prófið verður með svipuðu sniði og fyrri ár og allar bækur og nótur eru leyfileg prófgögn. Dæmin munu svipa til tímadæma yfir misserið.
Vægi jólaprófs í lokaeinkunn er 80-100%

Lögmál Newtons

I Hraði hlutar breytist aðeins ef kraftur verkar á hann

II $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$

$\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$, $p = m\bar{v} = m\dot{\bar{r}}$

Tregðukerfi: í þeim gilda lögmál Newtons

→ kerfi í jafnri hreyfingu

engin hröðun

$F = m\ddot{r}$ eins í þeim öllum

III

$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

Gildir aðeins um miðlæga krafta (Central forces) ← óháðir hraða, og verka eftir tengilínu hlutanna

{þess vegna gekk mönnum illa að átta sig á rafsegulfræði}

Hreyfijöfnur

Skoðum hreyfingu agnar í loft og notum einfallt líkan fyrir loftviðnám

$$\bar{F} = m\bar{g} - mkv^n\frac{\bar{v}}{v}$$

$n = 1$ eða 2

m til þægindu, breytir aðeins skilgreiningu á k

stefna viðnámskrafts móti hraða

Einvíð hreyfing í efni með n=1

$$ma = m\dot{v} = -kmv$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt'$$

$$\ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -kt$$

$$\to \boxed{v(t) = v_0\exp\{-kt\}}$$

Innskot um vídd

Allar eðlisfræðilegar stærðir má tákna við lengd L, massa M og tíma T

$\{\text{vídd } t\} = [t] = T$

Aðeins er hægt að taka exp af hreinni tölu

$\to [kt] = 1$

því er $\{\text{vídd } k\} = \frac{1}{T}$

eða $[k] = \frac{1}{T}$

Hvað með ln?

$$\boxed{v(t \to \infty) = 0}$$

Hversu langt kemst ögnin?

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\to dx = v\,dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx' = \int_0^t dt'\,v(t') \qquad \text{ef } x(0) = 0$$

$$= v_0\int_0^t dt'\exp\{-kt'\}$$

$$x(t) = -\frac{v_0}{k}\{e^{-kt} - 1\}$$

5

eða

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{k}\left\{1 - e^{-kt}\right\}}$$

sjá: $\left[\frac{v_0}{k}\right] = \frac{L}{T}T = L$

og

$$\boxed{x(t\to\infty) = \frac{v_0}{k} \quad \text{ef } k>0}$$

Við getum tengt x og v

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{v}$$

$$\to v\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\to \frac{dv}{dx} = -k$$

$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -k\int_0^x dx'$$

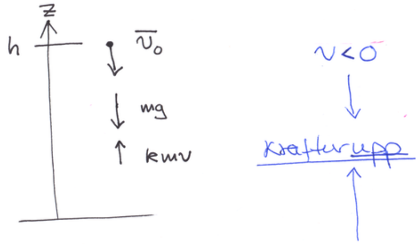
$$\to v - v_0 = -kx$$

$$\boxed{v = v_0 - kx}$$

$$\left\{ [kx] = \frac{L}{T} \right\}$$

6

Lóðrétt fall í lofti



$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv$$

$$\frac{dv}{kv+g} = -dt$$

Setjum $v_0 < 0$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{kv'+g} = -\int_0^t dt'$$

$$\frac{1}{k}\ln\left\{kv'+g\right\}\Big|_{v_0}^{v(t)} = -t$$

$$\ln\left\{\frac{kv(t)+g}{kv_0+g}\right\} = -kt$$

$$kv(t)+g = \left\{kv_0+g\right\}e^{-kt}$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{g}{k} + \frac{\{kv_0+g\}}{k}e^{-kt}}$$

7

$$\boxed{v(t\to\infty) = -\frac{g}{k}} \quad \text{markhraði}$$

$$\left[\frac{g}{k}\right] = \frac{L}{T^2}T = \frac{L}{T}$$

Kasthreyfing, 2D

Fyrst án loftmótstöðu

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

x-átt: $0 = m\ddot{x}$

y-átt: $-mg = m\ddot{y}$

Setjum upphaf

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$

upphafsferð: $|\vec{v}(0)| = v_0$

$$\ddot{x} = 0$$
$$\dot{x} = v_0\cos\theta$$
$$x = v_0 t\cos\theta$$

$$\ddot{y} = -g$$
$$\dot{y} = -gt + v_0\sin\theta$$
$$\underbrace{y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta}_{\text{tímaheildun + upphafsk.}}$$

8

Seilni (range) má finna frá tímanum T sem gefur $y(T)=0$

$$y(T) = T\left\{-g\frac{T}{2} + v_0\sin\theta\right\} = 0$$

$$\to T = \frac{2v_0}{g}\sin\theta \quad \text{flugtími}$$

$$R = x(T) = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

Með loftviðnámi

upphaf $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$\dot{x}(0) = v_0\cos\theta = U$$
$$\dot{y}(0) = v_0\sin\theta = V$$

9

hreyfijöfnur

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg \end{aligned}}$$

Sömu tegundar og í dæmunum á undan

{Í tíma eru x- og y-hreyfingar óháðar}

því fæst

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{U}{k}\left\{1-e^{-kt}\right\} \\ y(t) &= -\frac{gt}{k} + \frac{(kV+g)}{k^2}\left\{1-e^{-kt}\right\} \end{aligned}}$$

Hér er ekki einfalt að finna jöfnu fyrir $y(x)$, en einfalt að teikna y sem fall af x með því að reikna punkta fyrir mism t

skoðum graf aðeins seinna

10

flugtími -> seilni

$$Y(T) = -\frac{gT}{k} + \frac{(kV+g)}{k^2}\left\{1-e^{-kT}\right\} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{(kV+g)}{gk}\left\{1-e^{-kT}\right\}}$$

óbein jafna fyrir T

T má finna með rótarleit á

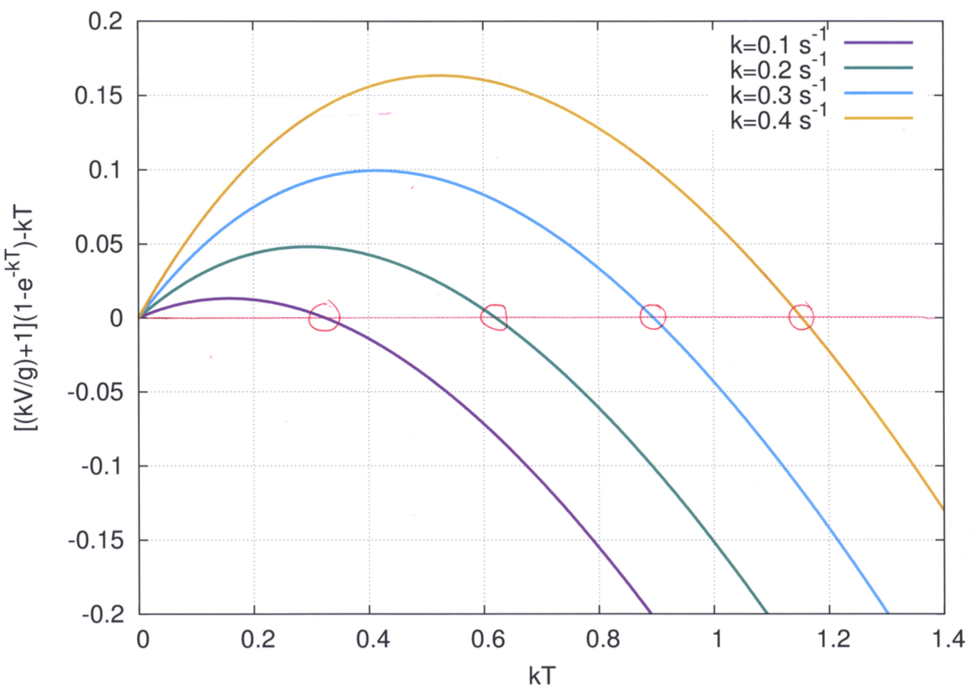
$$\boxed{\left\{\frac{kV+g}{g}\right\}\left\{1-e^{-kT}\right\} - kT = 0}$$

Breytan er kT (víddarlaus)

k kemur fyrir sem frjáls stiki

Sjá mynd á næstu síðu:

11



12

Skoðum truflanareikning og tölulega aðferð

Truflun

$[kT] = 1$

víddarlaus stiki

T verður endanlegt -> til eru gildi á k þ.a. $kT \ll 1$

þá má nota kT sem truflunarstika

Athugið að stærð með vídd getur aðeins verið smá í samanburði við aðra með sömu vídd

setjum $kT \ll 1$

$$kT = \frac{kV+g}{g}\left\{1-e^{-kT}\right\}$$

$$kT \simeq \frac{kV+g}{g}\left\{kT - \frac{1}{2}(kT)^2 + \frac{1}{6}(kT)^3 + \dots\right\}$$

$$1 \simeq \frac{kV+g}{g}\left\{1 - \frac{1}{2}kT + \frac{1}{6}(kT)^2\right\}$$

$$-\frac{kV}{g} = \frac{kV+g}{g}kT\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}kT\right\}$$

13

$$-\frac{kV}{kV+g} = kT\,\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}kT - 1\right\}$$

$$\rightarrow\; kT = \frac{2kV}{kV+g}\,\frac{1}{1-\frac{kT}{3}} \simeq \frac{2kV}{kV+g}\left\{1+\frac{kT}{3}+\frac{(kT)^2}{9}+\dots\right\}$$

$$kT\left\{1-\frac{2kV}{3(kV+g)}\right\} = \frac{2kV}{kV+g}\left\{1+\frac{(kT)^2}{9}\right\}$$

$$kT\left\{kV+3g\right\} = 6kV\left\{1+\frac{(kT)^2}{9}\right\}$$

$$kT = \frac{6kV}{kV+3g}\left\{1+\frac{(kT)^2}{9}\right\}$$

nálgum hægra megin $\quad T \approx T_0 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta = \frac{2V}{g}$

14

$$\boxed{kT = \frac{6kV}{kV+3g}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{kV}{g}\right)}{1+\frac{1}{3}\frac{kV}{g}}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}$$

$$\simeq 2\left(\frac{kV}{g}\right)\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)\right\}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}$$

$$\simeq 2\left(\frac{kV}{g}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)^2 = \boxed{2\left(\frac{kV}{g}\right)\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}}$$

Síðan er

$$x = \frac{U}{k}\left\{1-e^{-kt}\right\} \rightarrow x(T) = R = \frac{U}{k}\left\{1-e^{-kT}\right\}$$

15

Ritum $\quad R = \frac{U}{k}\left\{kT - \frac{1}{2}(kT)^2 + \dots\right\}$

setjum inn kT og fáum

án mótstöðu $R_0 = 2\frac{UV}{g}$

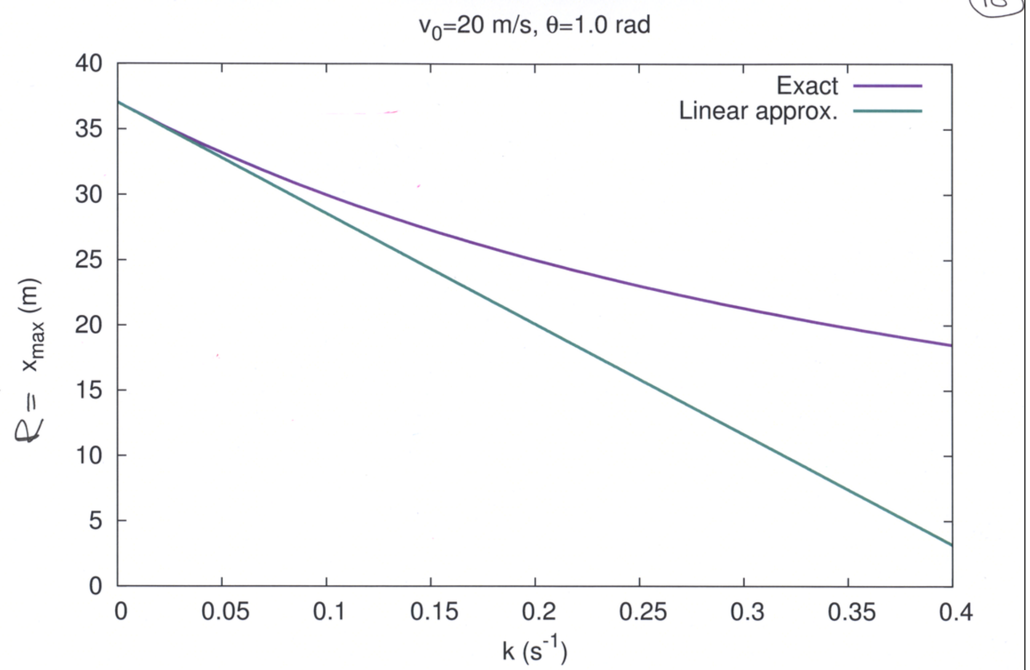
$$R \simeq 2\left(\frac{UV}{g}\right)\left\{1-\frac{4}{3}\frac{kV}{g}\right\} = R_0\left\{1-\frac{4}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)\right\}$$

Nálgun á seilni fyrir ögn í „lofti", línuleg í k

Berum saman á mynd við nákvæma lausn

Ræðum síðar hvernig nákvæm lausn er fundin

16



Kasthreyfing með loftmótstöðu ⇔ töluleg lausn (1)

Við fengum nákvæma lausn með greinireikningi, en þurftum nálgun t.þ.a. reikna seilni

Hvernig mætti nálgast lausn fyrir flóknara líkan af mótstöðu? (eða almenna aðferð fyrir flestar hreyfijöfnur sem verða á vegi okkar í þessu námskeiði)

Ekki í bók ← (en verður í Greiningu III)

Skoðum fyrir kasthreyfingu
Hreyfijöfnur voru

$$\ddot{x} = -k\dot{x}$$
$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g$$

Tvær óháðar annarsstigs afleiðujöfnur. Þær gætu verið háðar og fleiri og flóknari, líka ólínulegar

Breytum þeim í hneppi 1. stigs afleiðujafna (2)

Hér þurfum við 4 breytur, köllum y_1, y_2, y_3, y_4

Setjum

$$y_1 = x \quad \to \quad \dot{y}_1 = \dot{x} = y_2$$
$$y_2 = \dot{x} \quad \to \quad \dot{y}_2 = \ddot{x} = -k\dot{x} = -ky_2$$
$$y_3 = y \quad \to \quad \dot{y}_3 = \dot{y} = y_4$$
$$y_4 = \dot{y} \quad \to \quad \dot{y}_4 = \ddot{y} = -k\dot{y} - g = -ky_4 - g$$

Hneppið er því

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -ky_2 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= -ky_4 - g \end{aligned}$$

Hneppi 1. stigs afleiðujafna línulegt
Lausn gefur $x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$

(3)

Ég nota undirstefjuna „ddriv1.f" úr opna slatec forritasafninu (www.netlib.org/slatec) til að leysa hneppið í stuttu FORTRAN forriti sem ég þýði með gfortran ← opið og til fyrir öll stýrikerfi

fyrir þá sem hafa áhuga dreifi ég nokkrum forritum, þýddu slatec-safninu og skriftum fyrir gnuplot og keyrslu forritanna á vefsíðu námskeiðsins

Val forritunarmáls, opið mikill hraði, allar keyrslur sýndar hér á eftir fyrir lausnir í 4 × 30,000 punktum taka sekúndubrot

Berum saman lausnir fyrir v- og v^2- loftmótstöðu

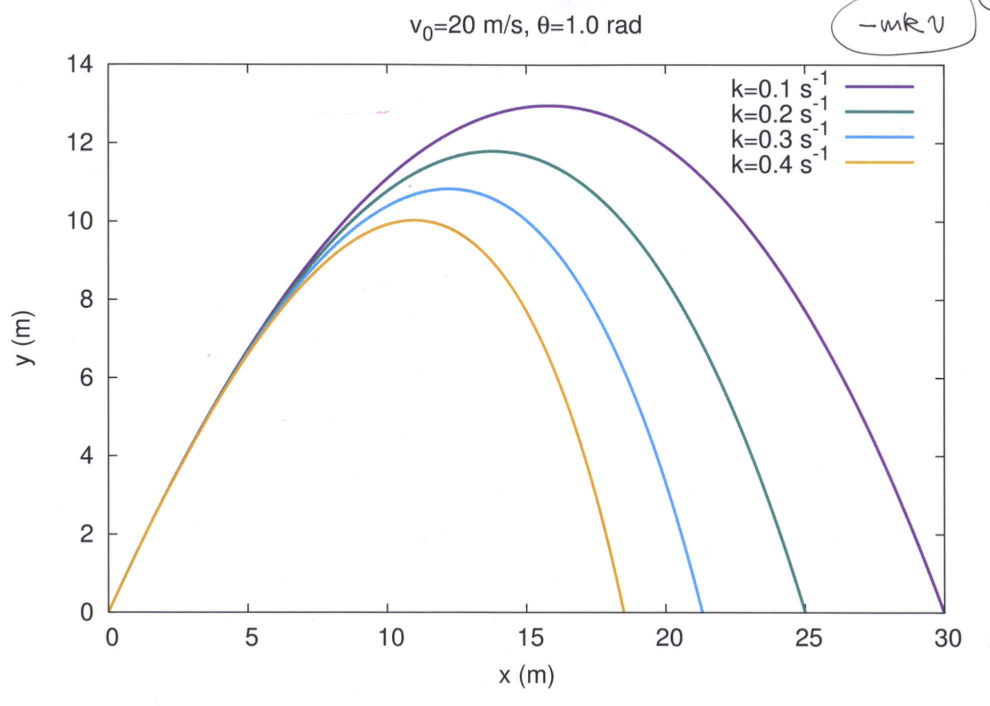
Athugið að fyrir v^2- loftmótstöðu þarf

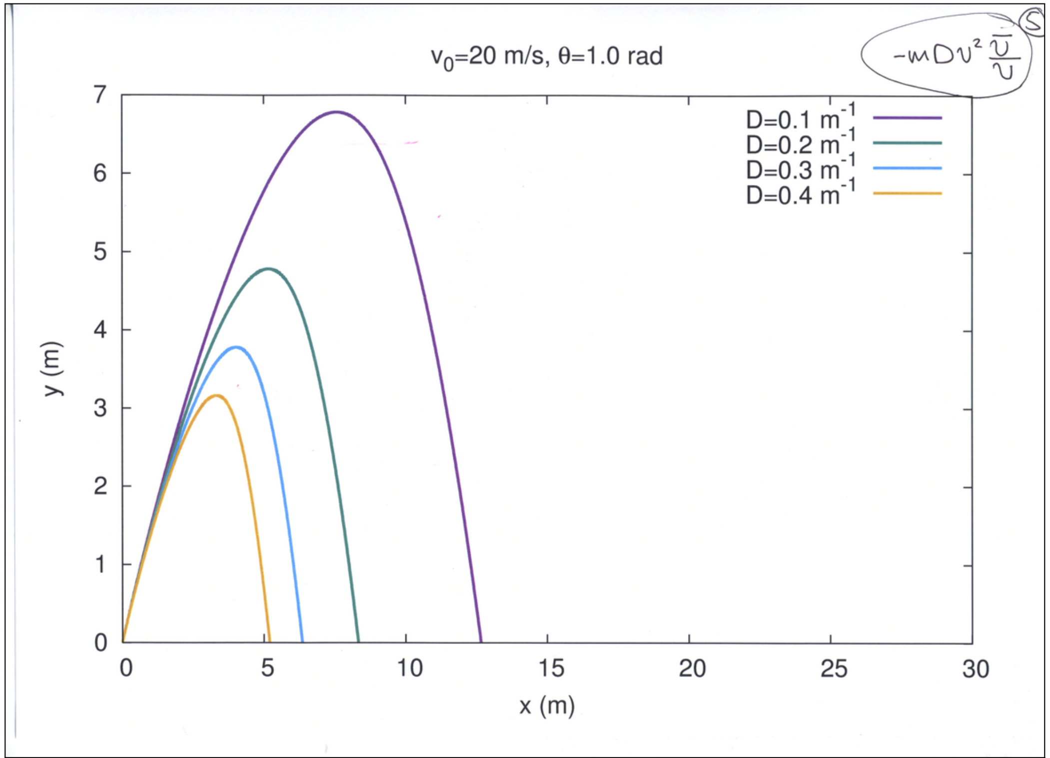
$$\vec{F} = m\vec{g} - mDv^2\frac{\vec{v}}{v}$$

$$[k] = \frac{1}{T}, \quad [D] = \frac{1}{L}$$

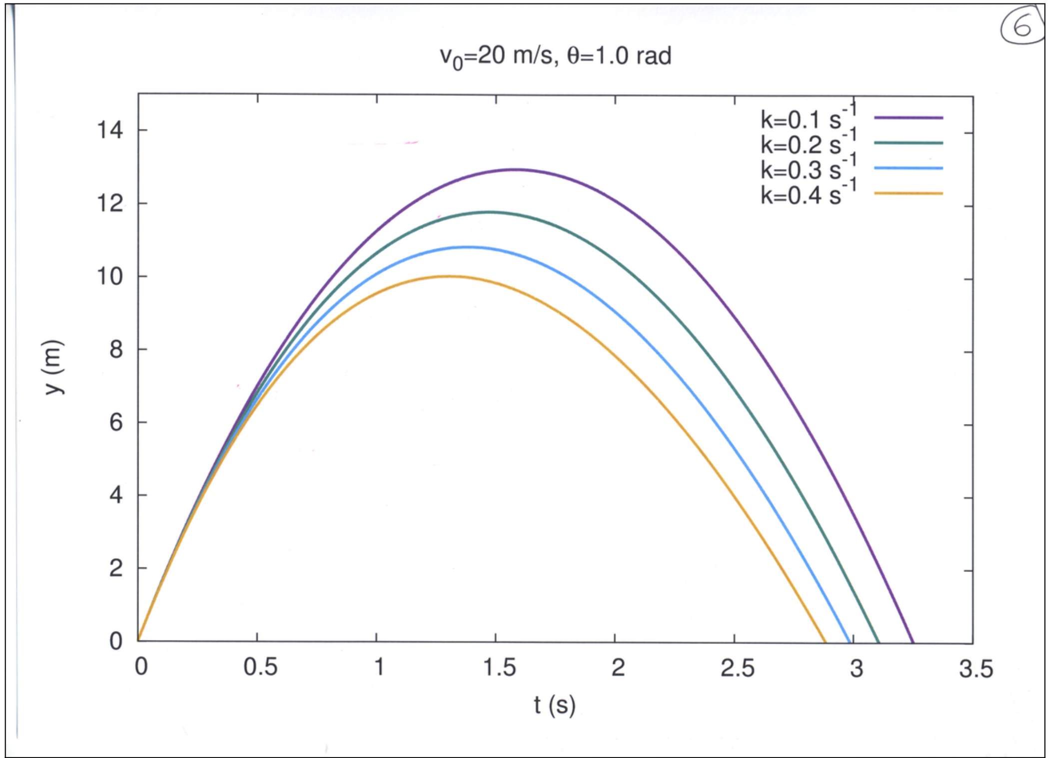
(4)

$-mkv$

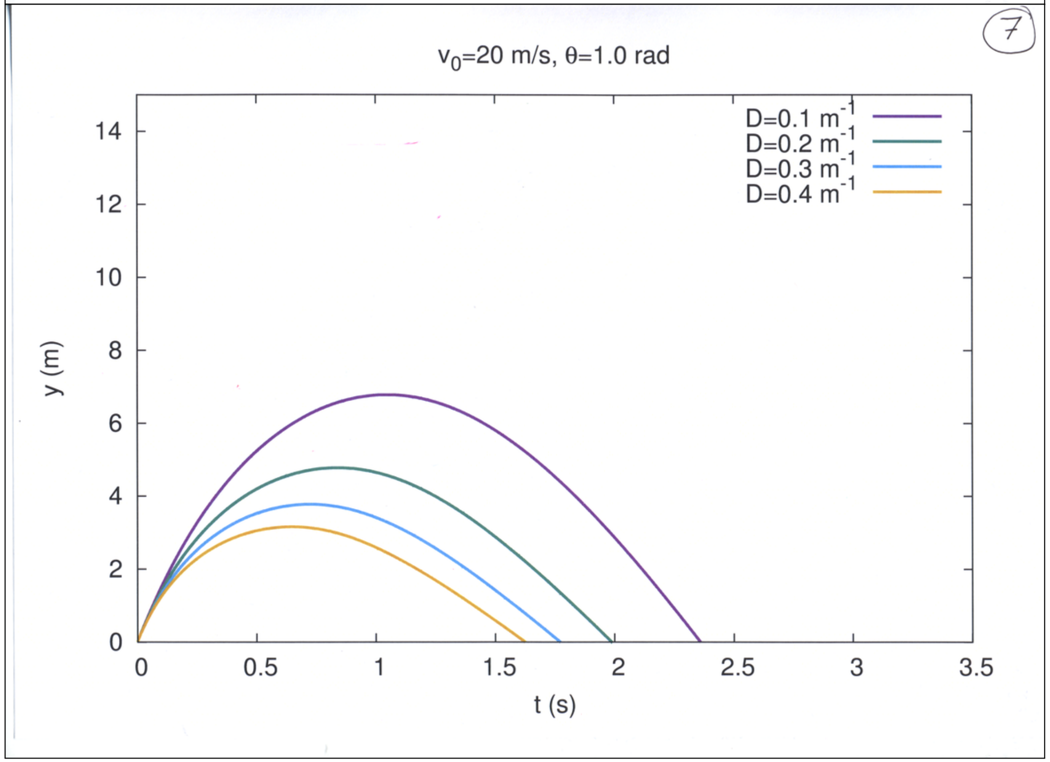




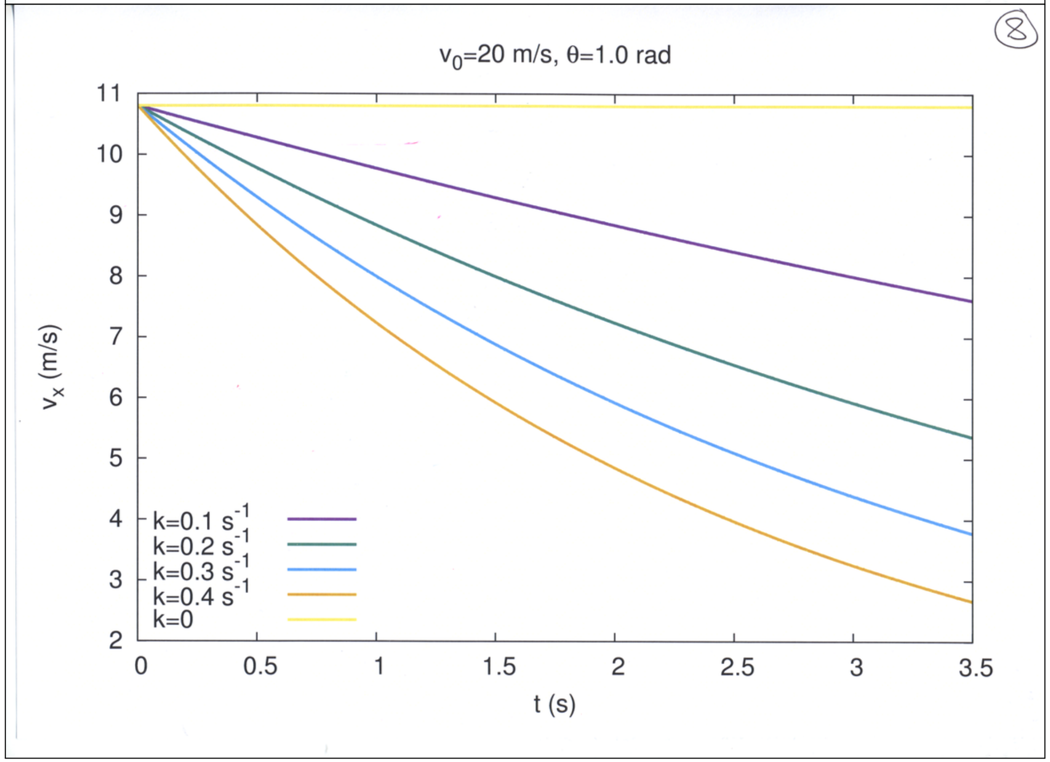
5
$-mDv^2 \frac{\vec{v}}{v}$
v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
D=0.1 m^{-1}
D=0.2 m^{-1}
D=0.3 m^{-1}
D=0.4 m^{-1}
y (m)
x (m)
0 1 2 3 4 5 6 7
0 5 10 15 20 25 30



6
v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
k=0.1 s^{-1}
k=0.2 s^{-1}
k=0.3 s^{-1}
k=0.4 s^{-1}
y (m)
t (s)
0 2 4 6 8 10 12 14
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5

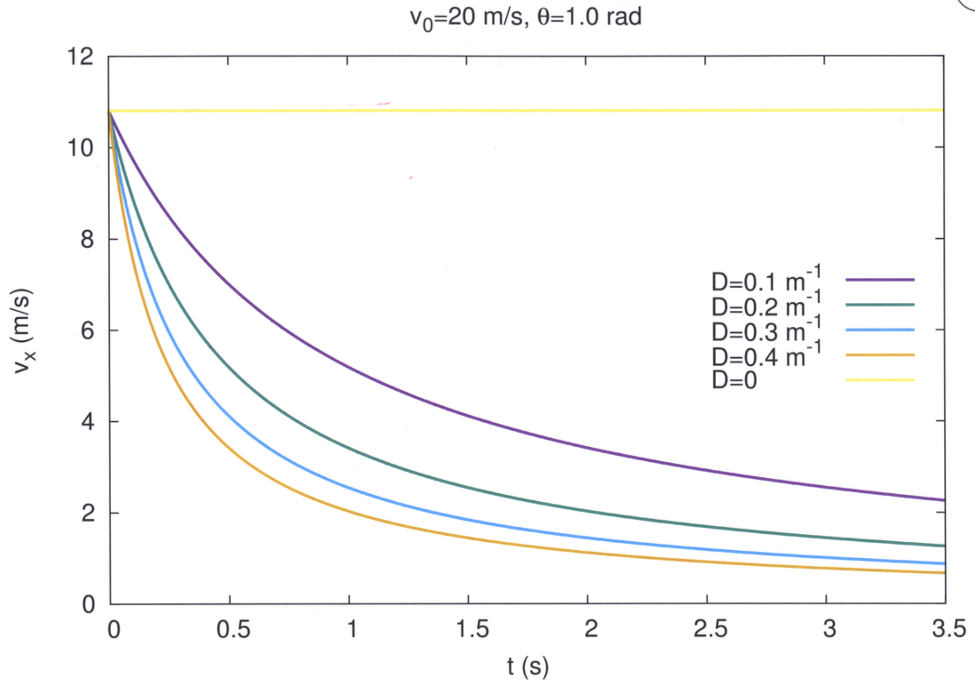


7
v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
D=0.1 m^{-1}
D=0.2 m^{-1}
D=0.3 m^{-1}
D=0.4 m^{-1}
y (m)
t (s)
0 2 4 6 8 10 12 14
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5

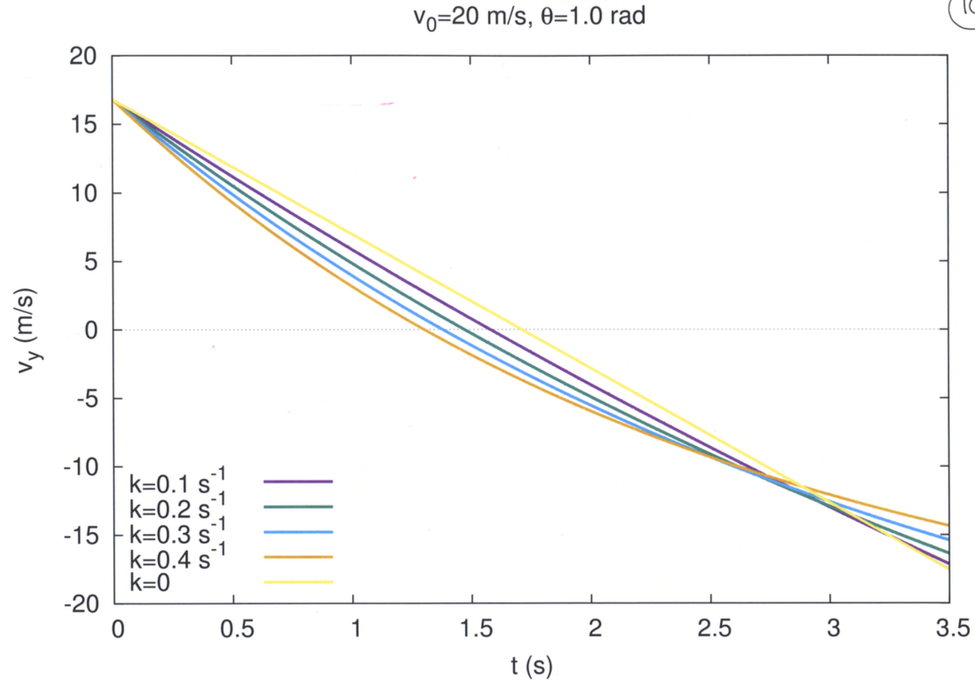


8
v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
k=0.1 s^{-1}
k=0.2 s^{-1}
k=0.3 s^{-1}
k=0.4 s^{-1}
k=0
v_x (m/s)
t (s)
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5

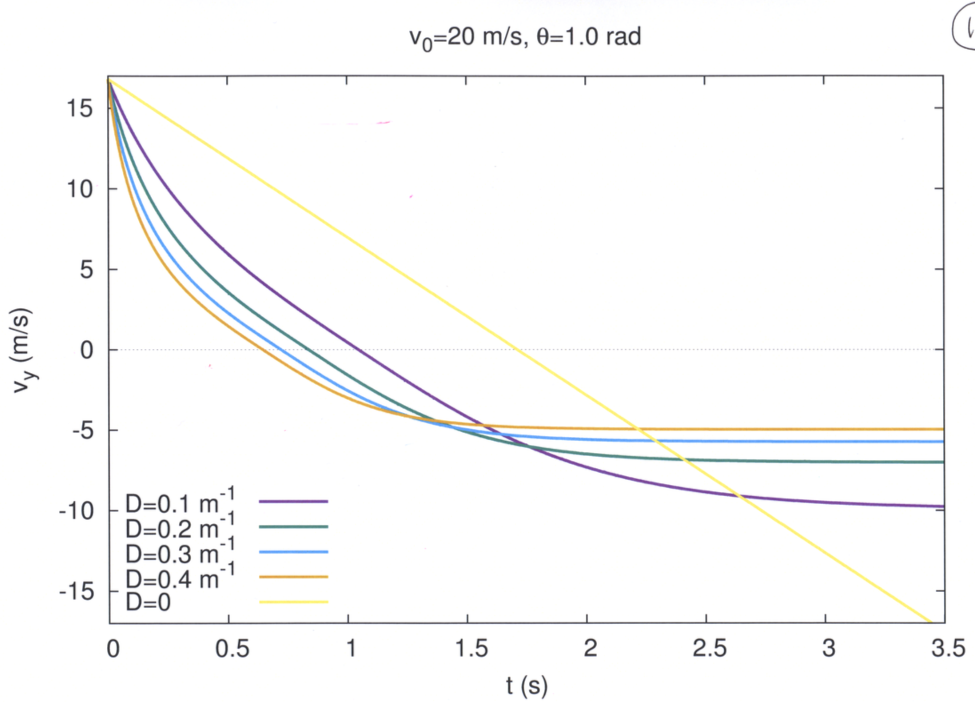
9



10



11



12

Varðveislulögmál

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \bar{F} = 0 \rightarrow \dot{\bar{p}} = 0,$$ $\boxed{\bar{p} \text{ varðveitt ef engin kraftar verkar á ögnina}}$

Hverfiþungi

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$$ miðað við punkt sem er upphaf $\bar{r}$

$$\bar{N} = \bar{r} \times \bar{F}$$ vægi krafts miðað við

$$\dot{\bar{L}} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = (\dot{\bar{r}} \times \bar{p}) + (\bar{r} \times \dot{\bar{p}})$$
$$= \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \dot{\bar{p}}$$
$$= (\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}})m + \bar{r} \times \dot{\bar{p}} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{N}$$

$\boxed{\bar{L} \text{ er varðveitt ef ekker vægi verkar á ögnina}}$

Orka

Vinna $\bar F$ á ögn er skilgreind sem

$$W_{12} = \int_1^2 \bar F \cdot d\bar r$$

Ef $\bar F$ er heildarkrafturinn á ögnina

$$\rightarrow \bar F \cdot d\bar r = \left(m \frac{d\bar v}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\bar r}{dt}dt\right) = m\frac{d\bar v}{dt}\cdot \bar v\, dt$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\bar v\cdot\bar v)dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\rightarrow W_{12} = \left\{\frac{1}{2}mv^2\right\}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}m\left\{v_2^2 - v_1^2\right\} = T_2 - T_1$$

þar sem $T = \frac{1}{2}mv^2$ er hreyfiorka eindarinnar

$\boxed{\bar F \text{ verkar á ögnina og breytir hreyfiorku hennar}}$

Vinna $\bar F$ bætist við eða dregst frá hreyfiorku agnarinnar

Ef vinna $\bar F$ á ögnina er óháð leið þá kallast krafturinn geyminn (conservative) og

$$\oint \bar F \cdot d\bar r = 0$$

{Athugið að heildið getur aldrei horfið fyrir viðnámskraft}

$\boxed{\text{opin eða lokuð kerfi}}$

þá er til mættisfall $U(r)$ þ. a.

$$\bar F = -\bar\nabla U(\bar r)$$

því $\bar F \cdot d\bar r = -dU$ er eina leiðin t.þ.a. W_{12} sé aðeins háð endapunktum leiðarinnar

því fæst fyrir geyminn kerfi að

$$\left.\begin{aligned} W_{12} &= T_2 - T_1 \\ W_{12} &= U_1 - U_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

$$\rightarrow \quad E_2 = E_1$$

$\boxed{\text{Heildarorka geymins kerfis er föst}}$

U er óháð tíma.

$\boxed{\text{Skoðum aðeins hreyfingu í 1D}}$

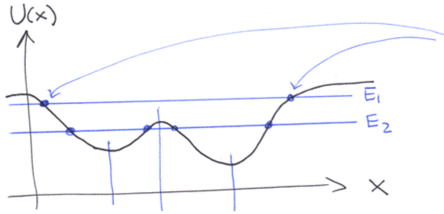
$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}$$

$$\rightarrow dt = \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}}$$

$$\rightarrow \boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\pm dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - U(x)\}}}}$$

Formleg lausn fyrir öll geymin 1D-kerfi



Viðsnúningspunktar

stöðugt jafnvægi

óstöðugt -||-

$$U(x) = U_0 + x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 + \cdots$$

Takmörk sígildrar aflfræði

Sígild aflfræði ⟷ Afstæðiskenning

Ekki gildir $\frac{v}{c} \ll 1$

↕

Skammtafræði

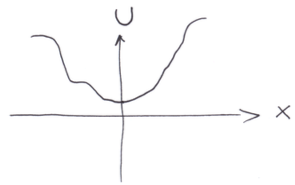
Smá kerfi ← óaðgreinanleiki $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ } smásætt

Safn einda, óaðgreinanleiki fylgni, samfösun } stórsæ skammtakerfi

Sveiflur

Atóm í grind, bíll á fjöðrum, ...

Allt um kring eru kerfi sem sveiflast, t.d. um lágmark í stöðuorku



Kerfið truflað frá jafnvægis-punktinum í $x=0$ hefur kraft sem leitast við að koma því aftur í jafnvægi

$$F(x) = F_0 + xF'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \dots$$

Jafnvægi í $x=0$ → $F_0 = 0$

því er lægsta nálgunin að

$$\boxed{F(x) = -kx}$$

með $k = \frac{dF}{dx}\Big|_{x=0} = F'(0)$

Við skoðum

Sveiflur
deyfingu
Örvun
Fasarúm

Byrjum með línulegt $F(x)$, en nálgumst ólínuleg kerfi (næsti kafli)

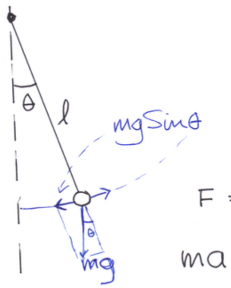
Í einni vídd er hreyfijafnan

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

þar sem ω_0^2 er grunntíðni kerfisins. Kerfið er hreintóna sveifill, sígildur

---

Tökum sem sýnidæmi einfaldan sveifil, stærð útslags getur haldið honum línulegum, eða gert ólínul.



$F = -mg\sin\theta$

$ma = -mg\sin\theta$

$a = l\ddot{\theta}$

því er hreyfijafnan

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \quad (1)$$

og fyrir lítil horn

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad (2)$$

með $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

línulegi sveifillinn er eins og hreintóna sveifill með lausn

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$$

eða

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$$

þ.s. útslagið θ_0 og fasahornið ákvarðast af upphafsskilyrðum

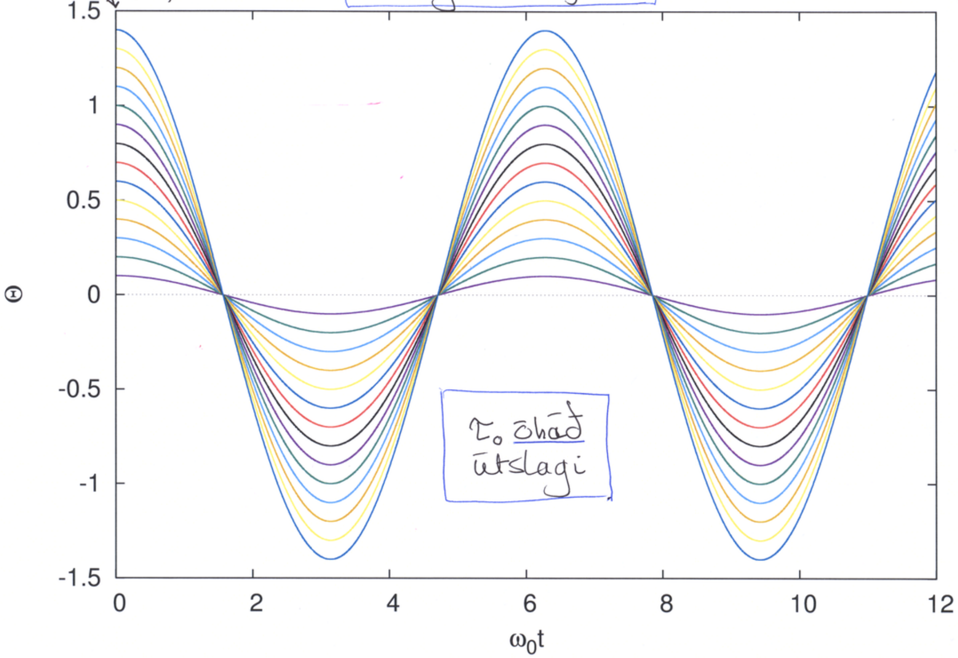
Jafna (1) hefur líka þekkta lausn í sporbaugsföllum, en hér berum við saman tölulegar lausnir þeirra fyrir vaxandi útslag

Fyrir línulega sveifilinn fæst lotulengd

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi$$

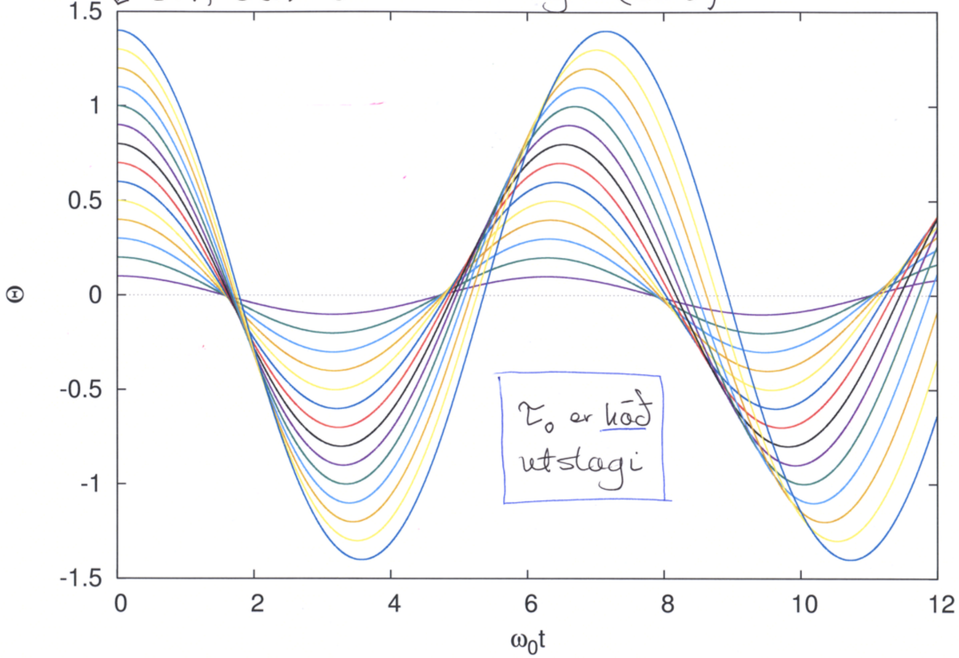
$$\rightarrow \tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$\theta(0),\ \dot{\theta}(0)=0$ Línulegur sveifill (4)



τ_0 óháð útslagi

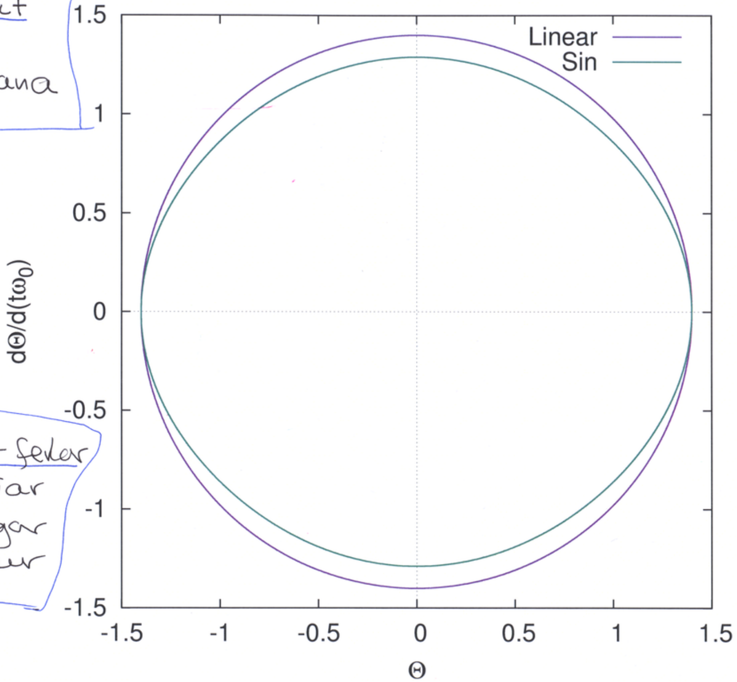
$\theta(0),\ \dot{\theta}(0)=0$ Ólínulegur ($\sin\theta$) (5)



τ_0 er háð útslagi

(6)

Fasarit fyrir sveiflana



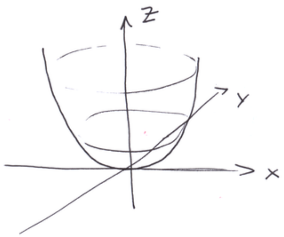
Lokaðir ferlar ódeyfðar reglulegar sveiflur

(7)

Hreintóna sveiflur í 2D

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0$$

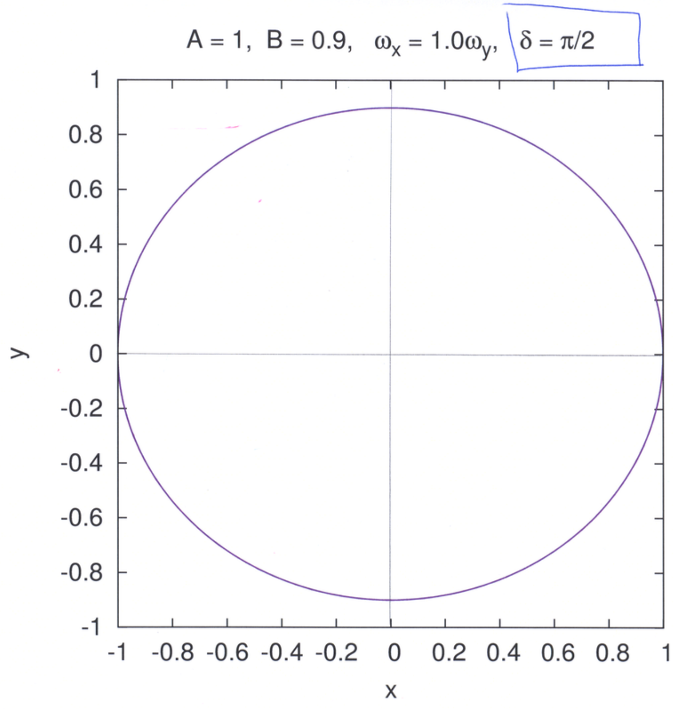
$$x(t) = A\cos(\omega_x t - \alpha)$$
$$y(t) = B\cos(\omega_y t - \beta)$$



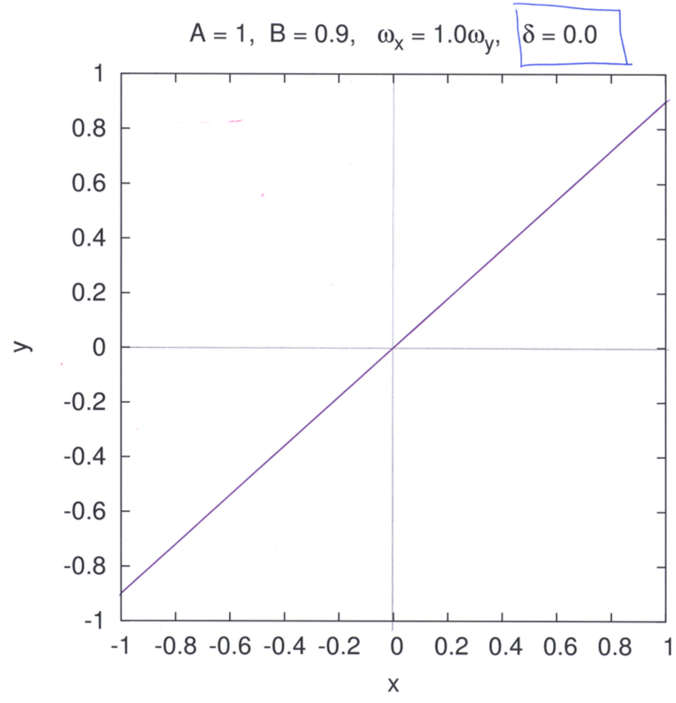
Sveiflurnar í x- og y- átt eru ótengdar

en fasamunur þeirra $\delta = \alpha - \beta$ og tíðnihlutfall leiða til Lissajous- ferla í tvívídu x-y-sléttunni

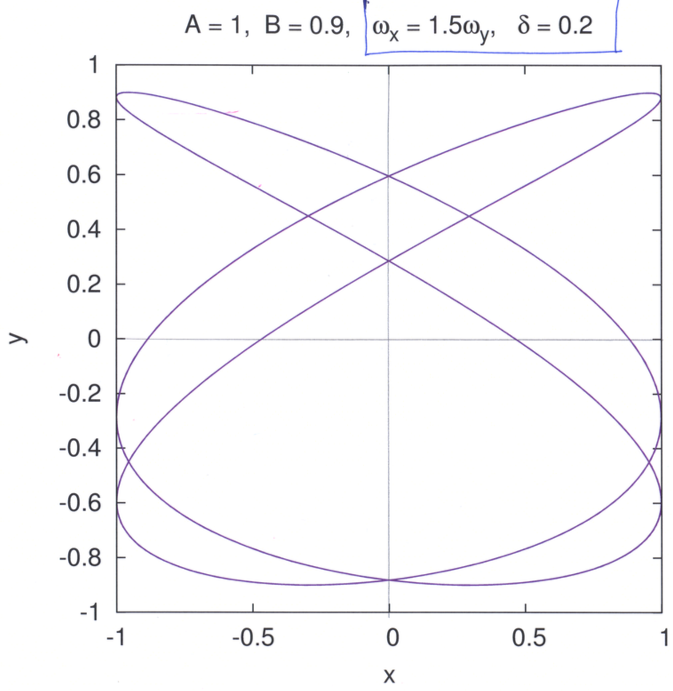
8



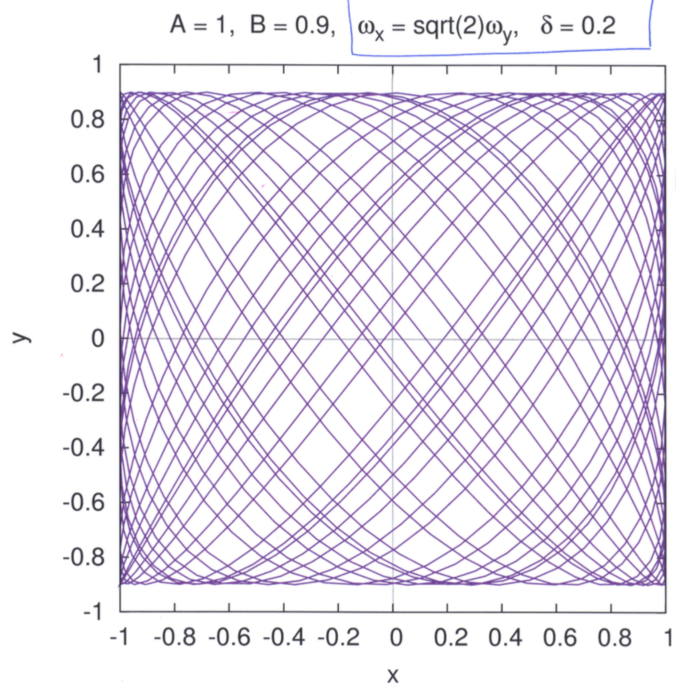
9



10



11



og heldur áfram að fylla svæðið

Deyfðar Sveiflur

Könnum sveifil með viðnámslið í réttu hlutfalli við ferð

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

Þegar lausn á forminu e^{rt} er reynd finnast tvær óháðar lausnir sem taka má saman sem (línuleg jafna)

$$\boxed{\theta(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right\}}$$

með

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Þrjú mismunandi tilvik

1. $\omega_0^2 > \beta^2 \;\rightarrow\; \alpha$ er þvertala

Köllum $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ og lausnin verður

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}\right\}$$

sem má umrita

$$\theta(t) = A e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta)$$

Lausnin sýnir deyfða sveiflu og kallast því vandeyfð

takið eftir að tíðnin hliðrast vegna deyfingar

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

og sveiflurnar fá meðalævi

2. $\omega_0^2 < \beta^2$ α er rauntala

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right\}$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Engar sveiflur, ofdeyfðar sveiflur

3. $\omega_0^2 = \beta^2$ $\alpha = 0$

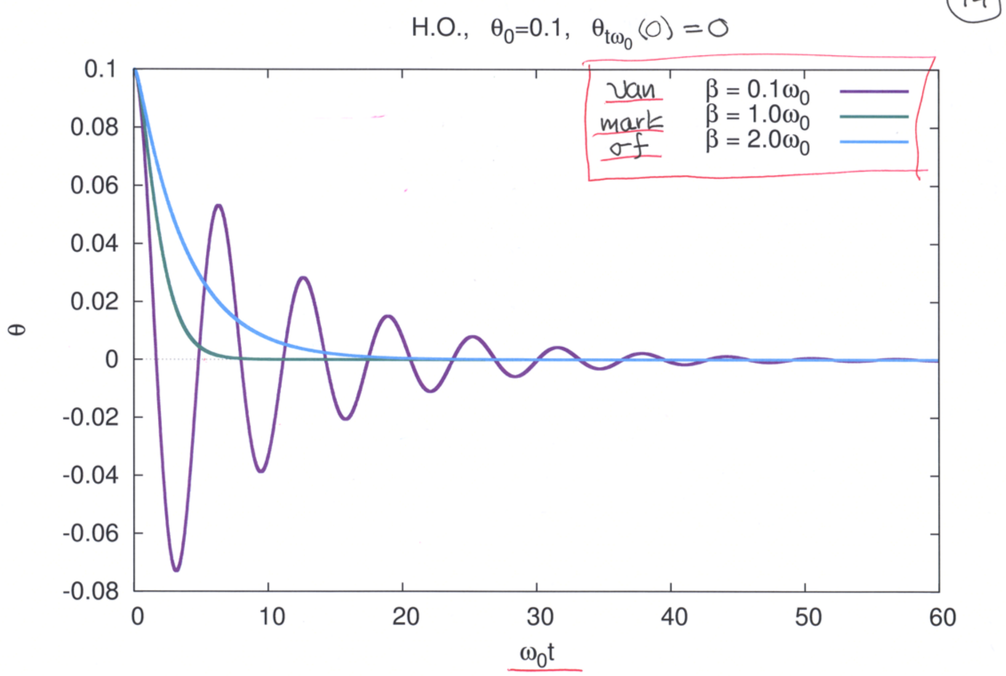
og lausnirnar eru ekki óháðar!

Rétt lausn þá er

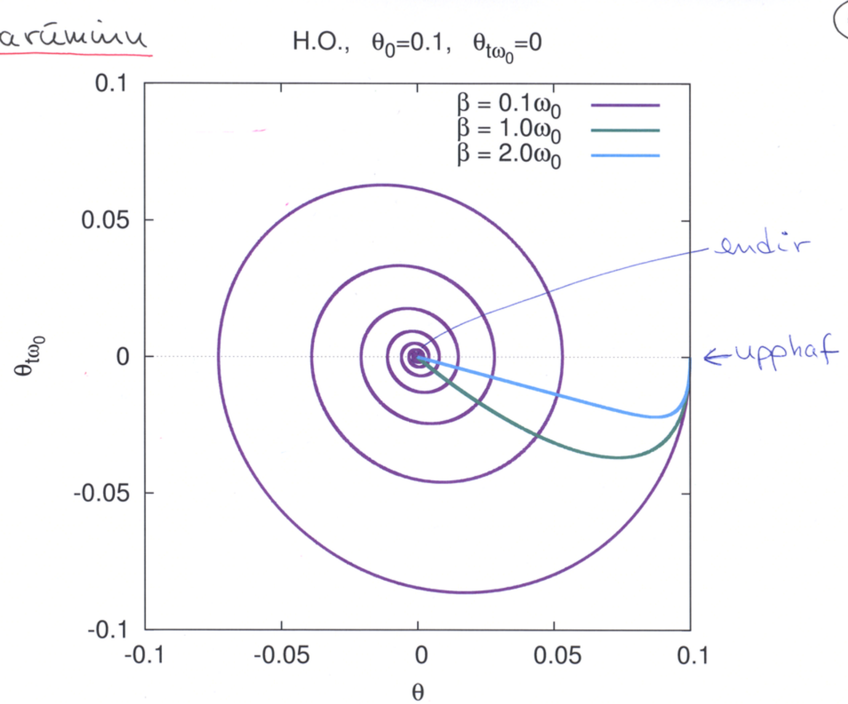
$$\theta(t) = \{A + Bt\}e^{-\beta t}$$

Hún kallast markdeyfð sveifla

Skoðum tölulegar lausnir áður en við komum til baka að þessum lausnum



Í fasarúminu



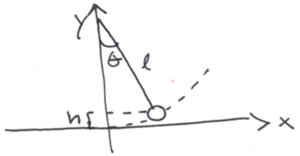
16

Heildarorka

$$E = T + V$$

Hreyfiorka + stöðuorka

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$



$$h = \ell - \ell \cos\theta$$
$$= \ell(1 - \cos\theta)$$
$$= \ell\left\{1 - \sqrt{1 - \sin^2\theta}\right\}$$
$$\simeq \ell\left\{1 - 1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta + \cdots\right\}$$

$$\to h \simeq \frac{1}{2}\sin^2\theta \simeq \frac{\ell\theta^2}{2}$$

$$v = \ell\dot\theta$$

því fæst

$$E \simeq \frac{1}{2} m(\ell\dot\theta)^2 + \frac{mg\ell}{2}\theta^2$$
$$= \frac{1}{2} m(\ell\dot\theta)^2 + \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell}(\ell\theta)^2$$
$$= \frac{1}{2} m\left\{(\ell\dot\theta)^2 + \omega_0^2(\ell\theta)^2\right\}$$

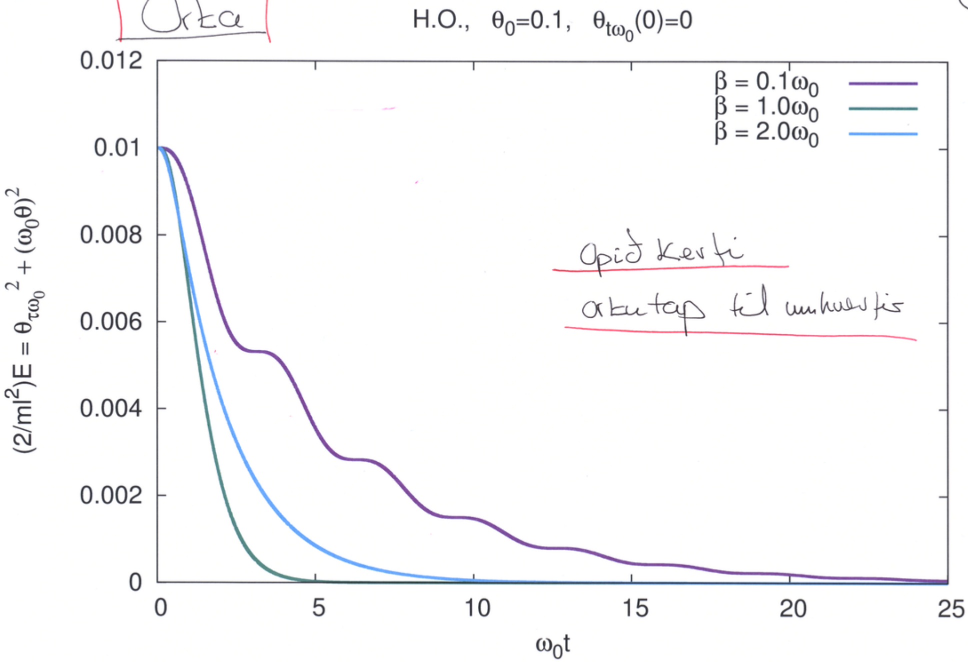
Hér erum við komin nærri falli Hamiltons, sem við ræðum síðar

$$\boxed{\frac{2}{m\ell^2} E = \dot\theta^2 + \omega_0^2\theta^2}$$

Deyfingin kemur ekki beint fyrir hér

17

Orka



18

Ofdeyfð „sveifla"

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right\}$$

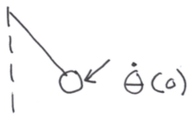
Báðir liðirnir eru í lausn, það skiptir máli hvernig $\dot\theta(0)$ er

þrjú tilfelli

(1) $\dot\theta(0) > 0$

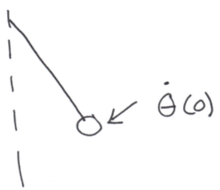
hámark fyrst svo fellur sveifillinn að núlli

(2) $\dot\theta(0) < 0$



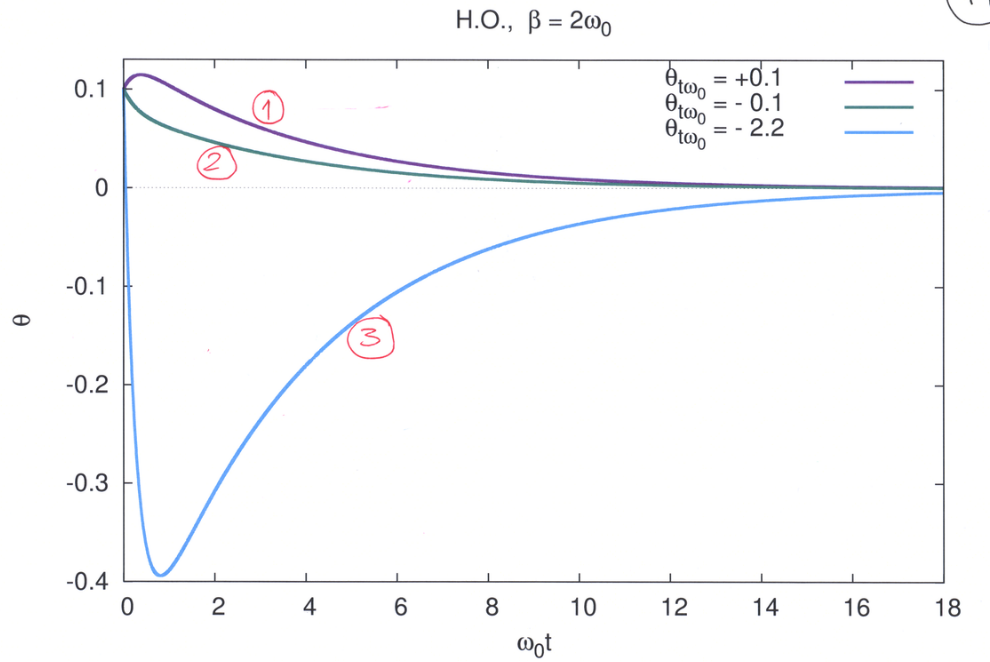
en samt nógu lítill hraði svo hann fellur beint að núlli

(3) $\dot\theta(0) < -(\beta+\alpha)\theta(0)$

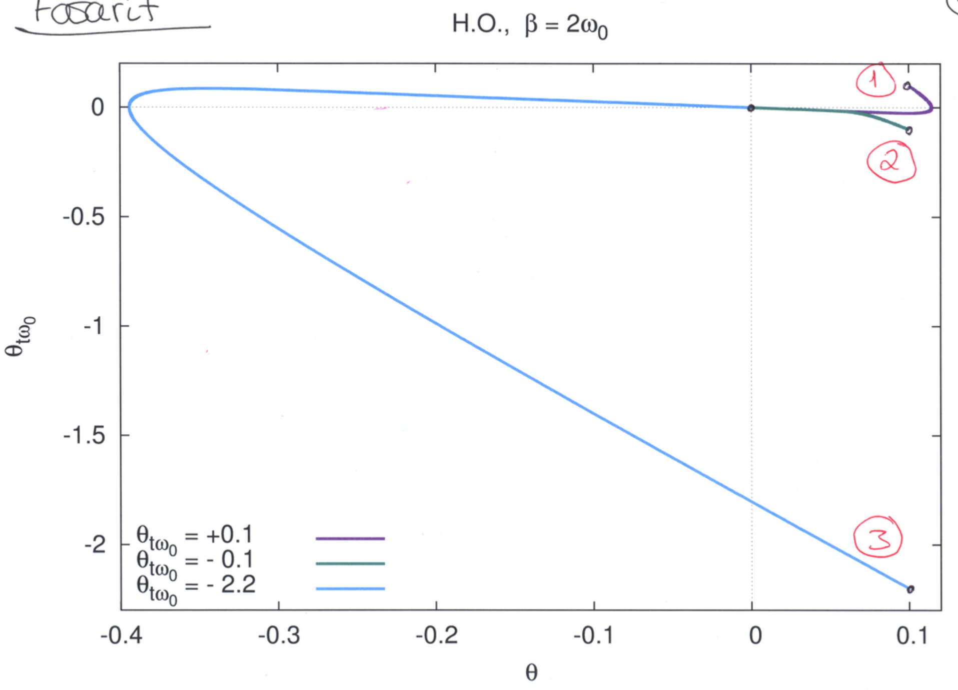


nógur hraði svo sveifillinn sveiflist einu sinni

19



Fasarit



Þvingaðar sveiflur (Driven)

Skoðum sveifil sem á verkar krafturinn

$$F = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega t)$$

Kraftur til baka í jafnvægi

viðnám

þvingun

Hreyfijafnan verður

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)}$$

$\beta = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$[\beta] = \frac{1}{T}$, $[\omega_0^2] = \frac{1}{T^2}$

$[A] = \left[\frac{F_0}{m}\right] = \frac{L}{T^2}$

Hreyfijafnan er hliðruð (inhomogeneous)

Grunnlausn óhliðruðu jöfnunnar

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

er

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right\}$$

með $\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Okkur nægir að finna eina sérlausn á hliðruðu jöfnunni til að fá almenna lausn hliðruðu jöfnunnar

$L(x_c) = 0$

$L(x_p) = f$

$L(x_c + x_p) = L(x_c) + L(x_p)$
$= 0 + f$

Stuðlarnir A_1 og A_2 nægja til að uppfylla upphafsskilyrðin

Giskum á sérlausn

$$x_p(t) = D\cos(\omega t - \delta)$$

takið eftir að hér sést ekki dempun í x_p

Setjum inn í hreyfijöfnu
D og δ eru ekki enn ákvörðuð

$$-\omega^2 D\cos(\omega t-\delta) - 2\beta\omega D\sin(\omega t-\delta) + \omega_0^2 D\cos(\omega t-\delta) = A\cos(\omega t-\delta)$$

we have terms with cos and sin therefore we use

$$\boxed{\cos(\omega t-\delta) = \cos(\omega t)\cos(\delta) - \sin(\omega t)\sin(\delta)}$$

$$\boxed{\sin(\omega t-\delta) = \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)}$$

Söfnum saman $\sin(\omega t)$ og $\cos(\omega t)$ - liðum

$$\left\{-A - D\left[(\omega^2-\omega_0^2)\cos(\delta) - 2\omega\beta\sin(\delta)\right]\right\}\cos(\omega t)$$
$$-\left\{D\left[(\omega_0^2-\omega)\sin(\delta) - 2\omega\beta\cos(\delta)\right]\right\}\sin(\omega t) = 0$$

Samtímis er hægt að uppfylla ef

$$D = \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\delta) + 2\omega\beta\sin(\delta)}$$

$$\boxed{\tan(\delta) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

Við vitum að

$$\sin\theta = \pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

Setjum því

$$\sin\delta = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

þá verður

$$\boxed{D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}$$

og

$$\boxed{\delta = \mathrm{Arctan}\left\{\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}}$$

Við höfum ákvarðað D og δ og því almennu lausnina

④

Tökum vandeyfðan sveifil

Lausnin er

$$x(t) = \underline{x_c(t)} + x_p(t)$$

→ Grunnlausnin er með veldisvísis deyfingu $e^{-\beta t}$

$$\rightarrow \boxed{x(t \gg 1/\beta) \rightarrow x_p(t)}$$

Svipula lausnin (transient) x_c hverfur þ.e. $t \rightarrow \infty$ ($\beta t \gg 1$)

Eftir verður sístæða lausnin $x_p(t)$, sem er þvinguð að utan

Sístæða lausnin er óháð því hvernig var kveikt á kerfinu

Innbyrðis hlutföll

$x(0), \dot{x}(0), A, \omega_0, \omega, \beta$

breyta mjög útliti lausnar $x(t)$ fyrir $\beta t < 1$

Sjá mynd 3-15 í bók Marions og 3-8 í D. Cline og Lausnir VG 2018-02-06

⑤

Hermun

Vandeyfður sveifill

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

útslag í sístæðri lausn, lotubundin, er ekki með hámark fyrir $\omega = \omega_0$

Hámarkið fæst þegar

$$\left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

Hermutíðni

$$\rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Kerfið með frjálsar ódeyfðar sveiflur sveiflast með

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

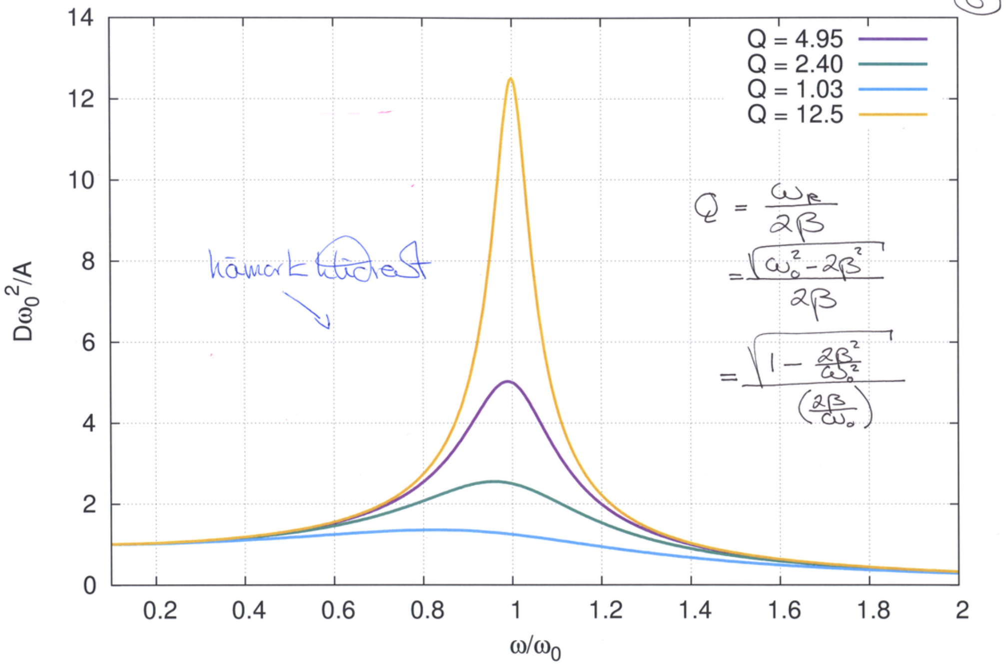
Frjálsar deyfðar sveiflur

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Þvingaðar sveiflur, deyfðar

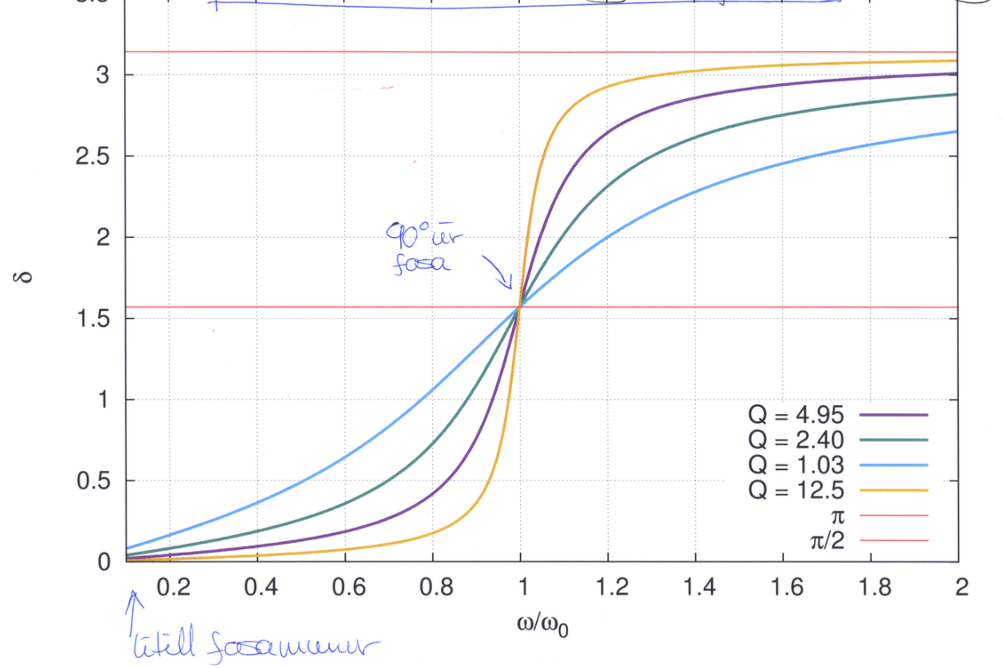
$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

⑥



⑦

Fasamunur sveiflu og þvingunar



Hreyfiorka – stöðuorka

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \frac{-A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \sin(\omega t-\delta)$$

$$\rightarrow T = \frac{mA^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2} \sin^2(\omega t-\delta)$$

Við munum að $U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ og því sveiflast T og U 90° úr fasa, en

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2} \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t-\delta) \right\}$$

$$= \frac{mA^2}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}$$

því fæst að

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0$$

gefur

$$\omega_E = \omega_0$$

Hermun í hreyfiorkunni er við $\omega = \omega_0$

Stöðuorkan $\sim A^2$, því er hermun í stöðuorkunni við

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Ástæðan fyrir þessu er að kerfið er opið, orku er eytt úr því með viðnámsliðnum og dælt inn í það með þvingunarliðnum

Kerfi

Mekanískt kerfi

Rafrásir

{Í dæmi Ex. 3.4 er rangt að segja að Kirchhoff-regla gefi ..., það er lögmál Faradays}

Geislandi kerfi

Atóm . . . . .

Samlagning lausna

Við ráðum við flóknari þvingunarliði skoðum lotubundna $F(t+\tau) = F(t)$, $\tau = 2\pi/\omega$.

línulegur virki táknar aflfræðijöfnuna

$$\mathbb{L} x(t) = F(t)$$

$$\mathbb{L}(x_1+x_2) = \mathbb{L}x_1 + \mathbb{L}x_2 \rightarrow \mathbb{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$$

eða almennt

$$\mathbb{L}\left\{\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n F_n(t)$$

þess vegna ef

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n)$$

þá fæst sístöðulausnin

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_n^2)^2+4\omega_n^2\beta^2}}$$

$$\delta_n = \arctan\left\{\frac{2\omega_n\beta}{\omega_0^2-\omega_n^2}\right\}$$

Fourier fann að lotubundin föll, $F(t+\tau) = F(t)$, með lotu $\tau = 2\pi/\omega$ má skrifa sem

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right\}$$

12

b.s.

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau dt'\, F(t')\cos(n\omega t') \qquad n\omega t' = 2\pi n\frac{t'}{\tau}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau dt'\, F(t')\sin(n\omega t')$$

Þetta er vegna þess að föllin $\cos(n\omega t)$ eru hornrétt

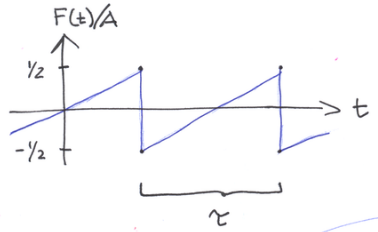
$$\int_0^\tau dt' \cos\left(2\pi n\frac{t'}{\tau}\right)\cos\left(2\pi m\frac{t'}{\tau}\right) = \frac{1}{4}\int_0^\tau dt\left\{e^{2\pi n\frac{t'}{\tau}} + e^{-2\pi n\frac{t'}{\tau}}\right\}\left\{e^{2\pi m\frac{t'}{\tau}} + e^{-2\pi m\frac{t'}{\tau}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\tau dt'\left\{e^{2\pi\frac{t'}{\tau}(n-m)} + e^{-2\pi\frac{t'}{\tau}(n-m)}\right\} = \frac{\tau}{2}\delta_{n,m} = \begin{cases}\frac{\tau}{2} & \text{ef } n=m\\ 0 & \text{ef } n\neq m\end{cases}$$

13

Til gamans má athuga sagtannarfallið

$$F(t) = A\frac{t}{\tau} \quad \text{ef} \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$



oddstætt $\rightarrow$ $a_n = 0$

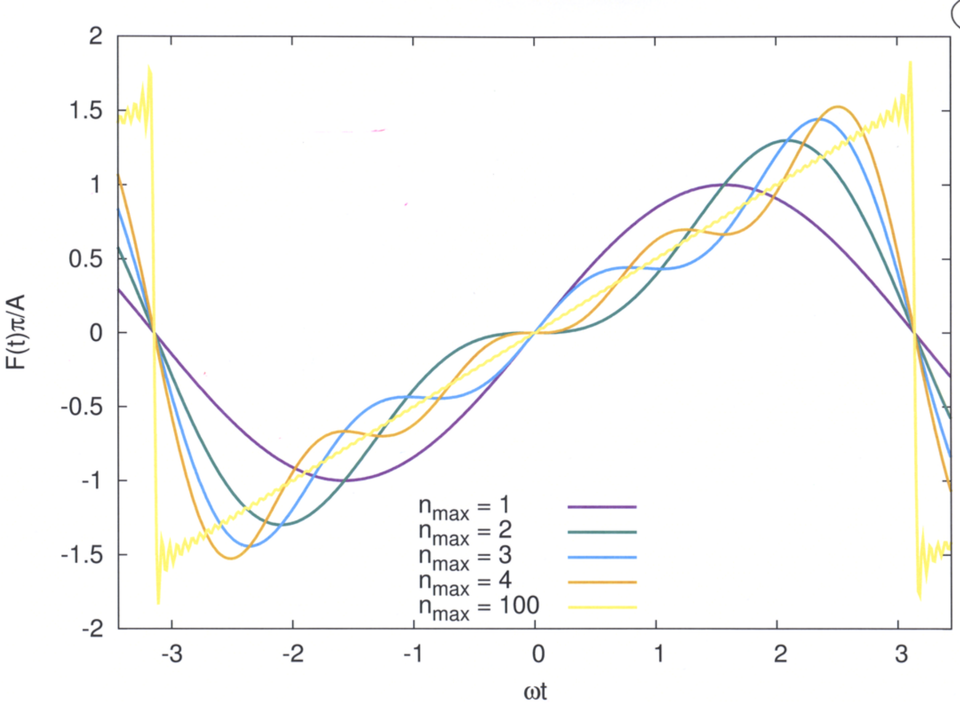
$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} dt'\, t'\sin(n\omega t')$$

$$= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left\{\left[-\frac{t'\cos(n\omega t')}{n\omega} + \underbrace{\frac{\sin(n\omega t')}{n^2\omega^2}}_{=0}\right]_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega}\right\}$$

$$= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left\{-\frac{2\pi}{\omega^2 n}\cos(n\pi)\right\} = \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\rightarrow F(t) = \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\omega t)}{n}(-1)^{n+1}\right\}$$

14



1

Ólínulegar sveiflur og ringl

Þvingaða og deyfða sveiflunum var lýst með hreyfijöfnu sem er eitt tilfelli af almennari jöfnum

$$\boxed{m\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = h(t)}$$

$f(\dot{x})$ og $g(x)$ geta verið ólínuleg föll, ef svo þá eru

ekki til almennar lausnar-aðferðir fyrir greinireikninga

Tölulegar lausnir

P.S. de Laplace $\leftrightarrow$ framreikn.

Henri Poincaré (1854-1912)

$\rightarrow$ Ringl (chaos)

Tölvur – tölulegar lausnir

$\rightarrow$ Fermi-Pasta-Ulam (1953)

$\rightarrow$ 1970 – 1980 . . . .

Næmni á upphafsástand

⋮

skammtafræði

2

Ólínulegar sveiflur

Við þekkjum hreintóna-sveiflurnar sem fást í mættinu

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

og kraft þess

$$F(x) = -kx$$

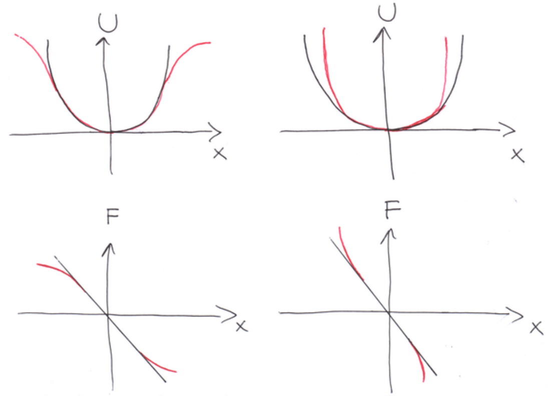
þetta er oft nálgun við raunkerfi

innilotun

Mörg kerfi sýna veikingu eða styrkingu innilotunar

$$F(x) \simeq -kx \mp \varepsilon x^3$$

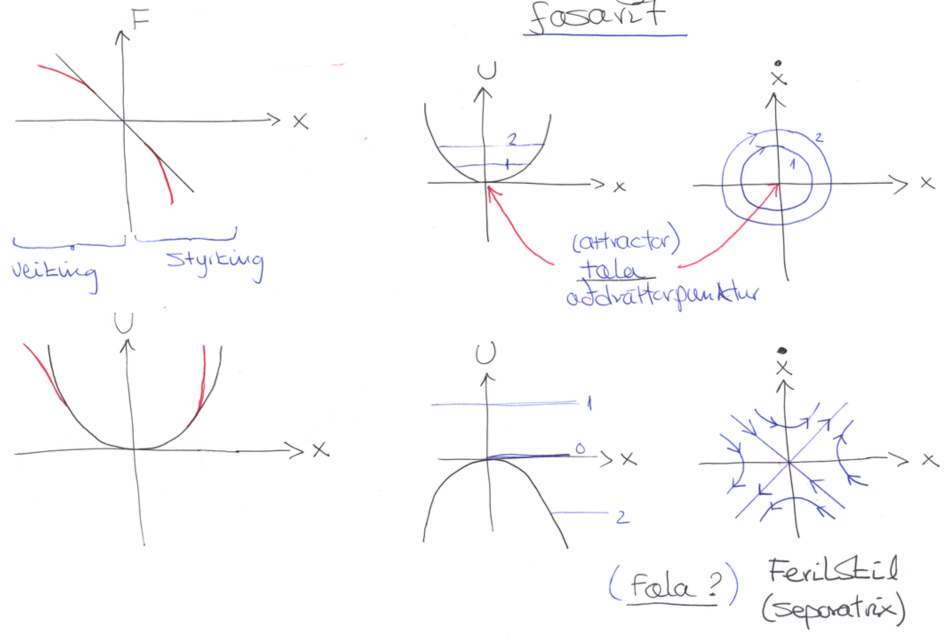
$$U(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2 \pm \frac{1}{4}\varepsilon x^4$$



3

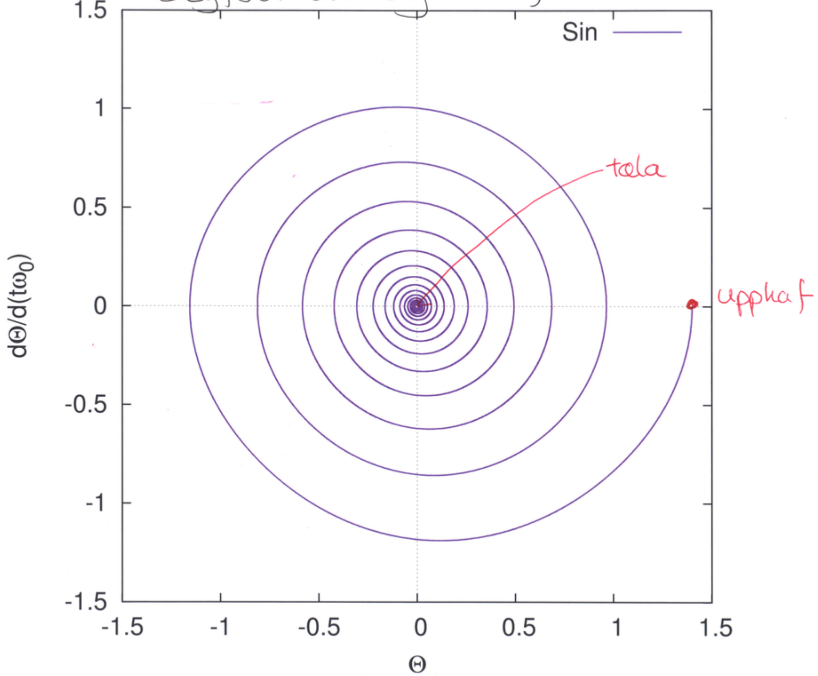
eða ósamhverft

Heppilegt að skoða fasarit



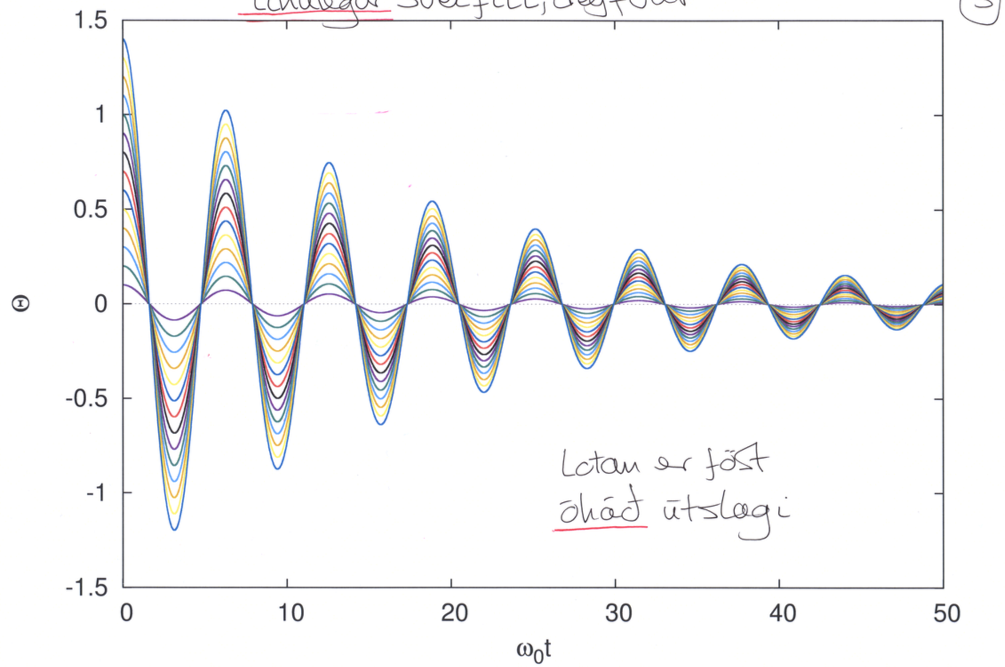
4

Deyfður ólínulegur sveifill



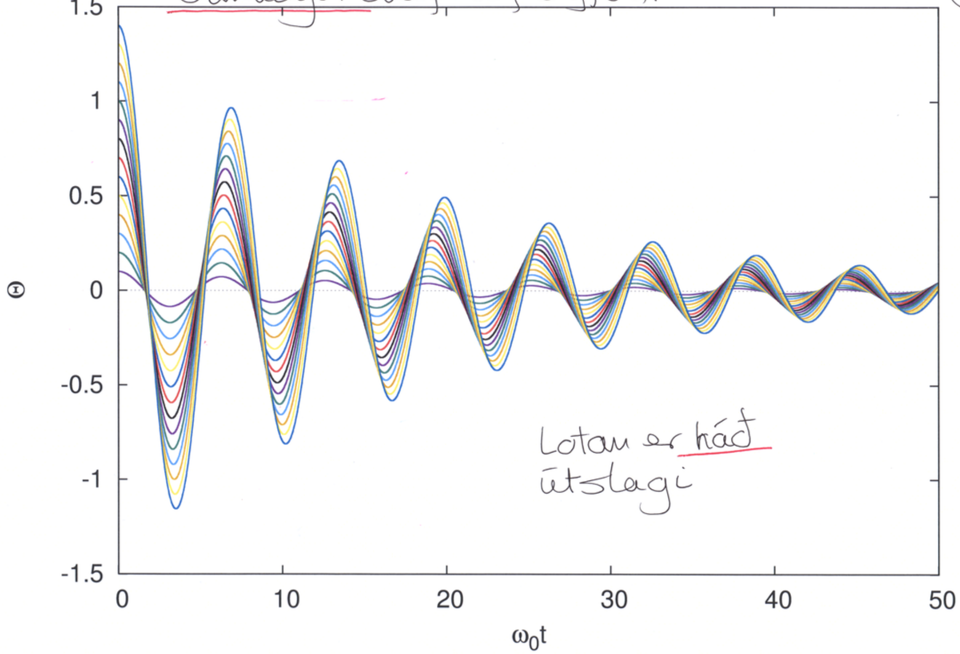
5

Línulegur sveifill, deyfður



Ólínulegur sveifill, deyfður

6



Ólínulegi sveifill van der Pols

7

B. van der Pol skoðaði ólínulegar sveiflur í rás með útvarpslampa. Jafnan sem lýsti þeim er

$$\boxed{\ddot{x} + \mu(x^2-a^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

μ er jákvæður fasti (lítill, en það hefur ekki merkingu nema við gerum hann víddarlausan eða berum saman við aðrar stærðir).

Útslag $|x|$ miðað við $|a|$ ræður því hvort $\dot{x}$-liðurinn sé deyfing eða styrking

8

Skoðum tölulega lausn, en fyrst þarf að skala jöfnuna til

$$\ddot{x} + \mu(x^2-a^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

En, tíminn er enn að flækjast fyrir

$$\frac{\ddot{x}}{a} + \mu a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right)\frac{\dot{x}}{a} + \omega_0^2\frac{x}{a} = 0$$

Setjum $t \to \omega_0 t$ ← víddarlaust og $\frac{df}{d(t\omega_0)} = f''$, $z = \frac{x}{a}$

$s = t\omega_0$

$$\omega_0^2 z'' + (\mu a^2\omega_0)\{z^2-1\}z' + \omega_0^2 z = 0$$

eða

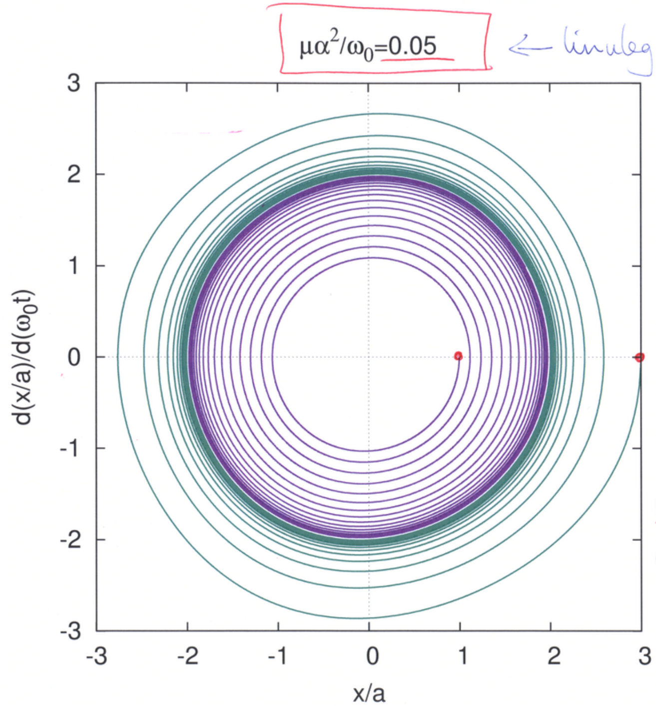
$$\boxed{z'' + \left(\frac{\mu a^2}{\omega_0}\right)(z^2-1)z' + z = 0}$$

Nú sést hvað er lítið, allir liðir eru víddarlausir hér

$[z] = 1$, $[s] = 1$ $\left[\frac{\mu a^2}{\omega_0}\right] = 1$

óháð því hvaða einingu x hafði í upphafi

9

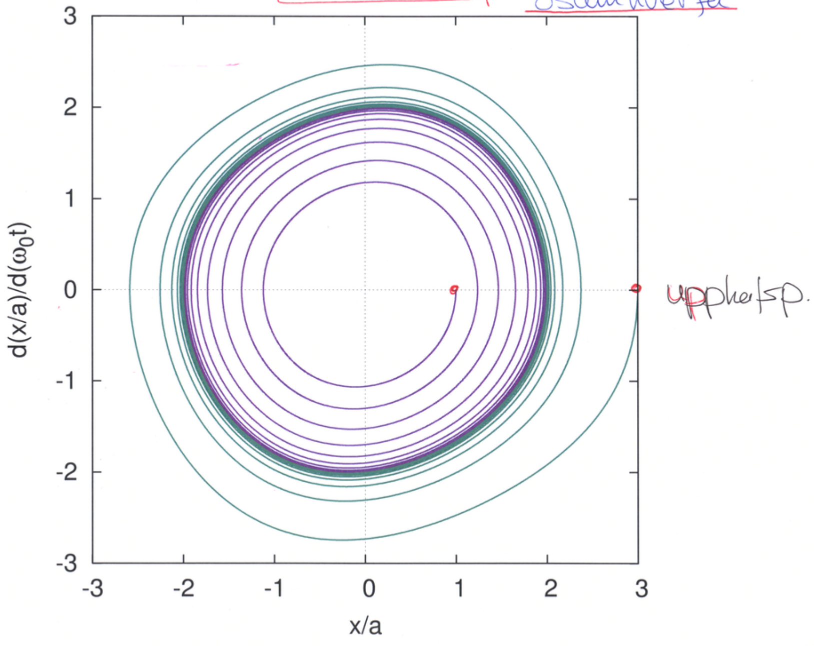


← línuleg hegðun.....

Tveir mism. upphafspunktar

Engin tala, mörk ferill (limit cycle)

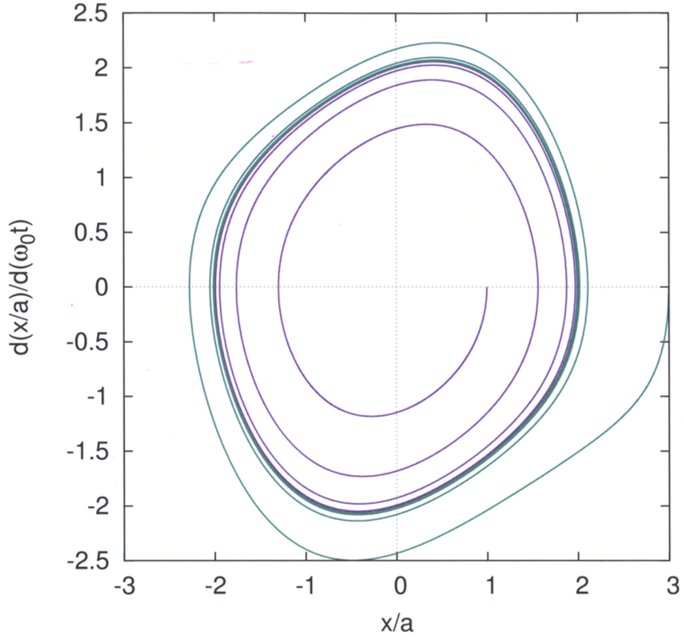
10



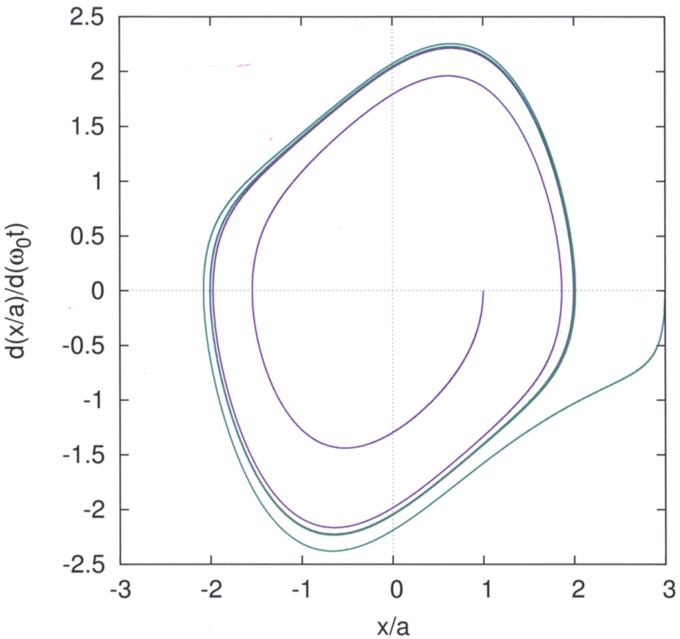
ólínuleg hegðun byrjar
ósamhverfa

upphafsp.

11

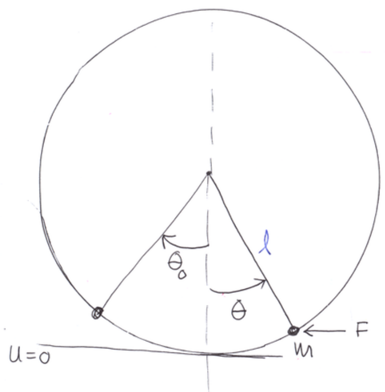


12



13

Sveifill



Hornið θ þarf ekki að vera lítið

$$I\ddot{\theta} = lF \quad , \quad I = ml^2 \text{ hverfitregða}$$

$$F = -mg\sin\theta$$

Fyrir lítið horn er kraftlurinn línulegur þá er sveifillinn hreintóna

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Annars er hreyfijafnan

Lausnina má skrifa á lokuðu formi með sporbaugsföllum, en við sleppum því $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$

Reynum aðra leið, með truflanareikn.

14

Geymið kerfi $\rightarrow$ $T + U = E$ fasti

$$T = \tfrac{1}{2} I \omega^2 = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \qquad T(\theta_0) = 0 \quad \text{upphafspunktur}$$

$$U = mgl(1-\cos\theta) \qquad U(\theta_0) = mgl(1-\cos\theta_0)$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \rightarrow E = U(\theta_0) = 2mgl \sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)$$

og $U = 2mgl\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$

$$T = E - U = 2mgl\left\{\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right\} = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\underbrace{\sqrt{\left\{\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right\}}}_{\geq 0} = \frac{d\theta}{dt}$$

15

Til að nálgast lotuna nýtum við

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{\tau}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}$$

venja er að gera breytuskipti

$$z = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}, \quad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\rightarrow dz = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} d\theta = \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{2k} d\theta$$

16

$$\rightarrow \boxed{\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}}$$

nákvæm lausn
τ er háð θ_0 í
gegnum k

Liðum

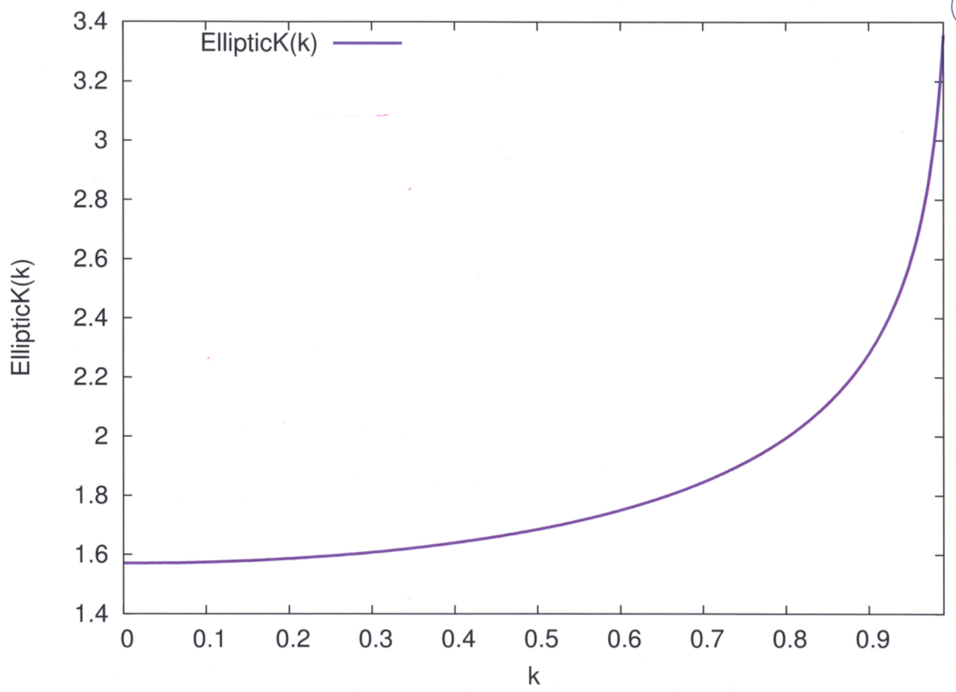
$$\left(1-(kz)^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{(kz)^2}{2} + \frac{3}{8}(kz)^4 + \cdots\cdots, \quad kz < 1$$

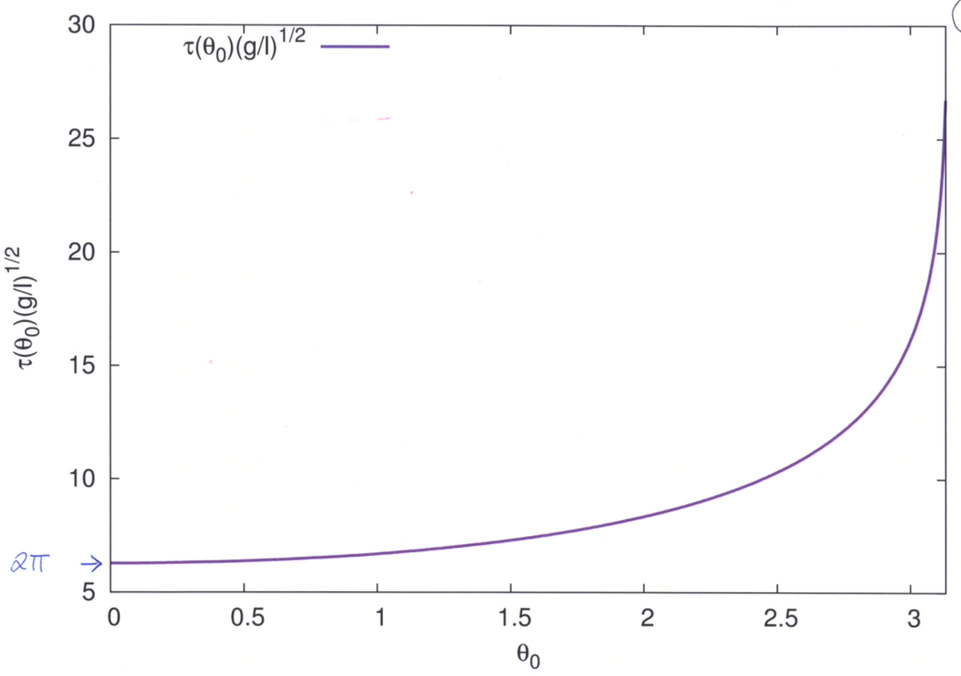
$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left[1 + \frac{(kz)^2}{2} + \frac{3}{8}(kz)^4 + \cdots\right]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4 + \cdots\right\} \qquad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k,1)$$

17





Pingl

Lítum á deyfðan og þvingaðan sveifil

Hann er þvingaður með vægi $N_d \cos(\omega_d t)$

$$N = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgl\sin\theta + N_d\cos(\omega_d t)$$

Hreyfijafnan er $\qquad I = ml^2$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{N_d}{ml^2}\cos(\omega_d t)}$$

Skölum $\quad s = t\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\qquad x' = \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\omega_0}$

Köllum $\quad x = \theta \qquad F = \frac{N_d}{ml^2\omega_0^2}$

$C = \frac{b}{ml^2\omega_0} \qquad \omega_d t = \frac{\omega_d}{\omega_0}s = \omega s \qquad x'' = \frac{\ddot{\theta}}{\omega_0^2}$

Hreyfijafnan er þá

$$x'' + Cx' + \sin(x) = F\cos(\omega s)$$

Tölulega lausn, breytum í tvær 1. stigs jöfnur

$Y_1 = x$

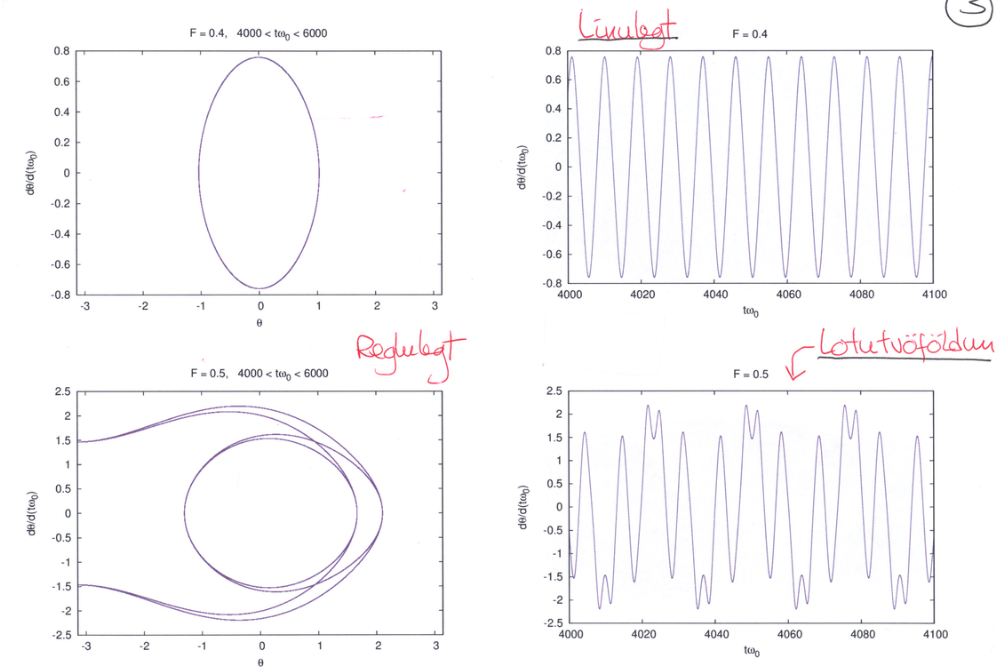
$Y_2 = x'$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_1' &= x' = Y_2 \\ Y_2' &= x'' = -Cx' - \sin(x) + F\cos(\omega s) = -CY_2 - \sin(Y_1) + F\cos(\omega s) \end{aligned}}$$

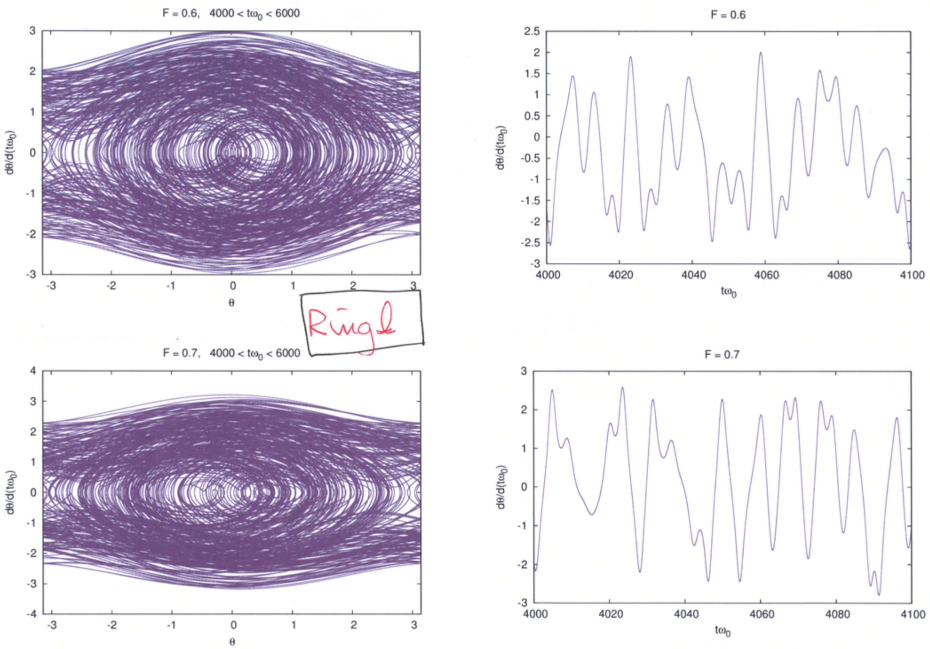
Setjum $\quad C = 0{,}05 \quad$ og breytum aðeins F

$\omega = 0{,}7$

og kendum upplýsingum um svipulu lausnina

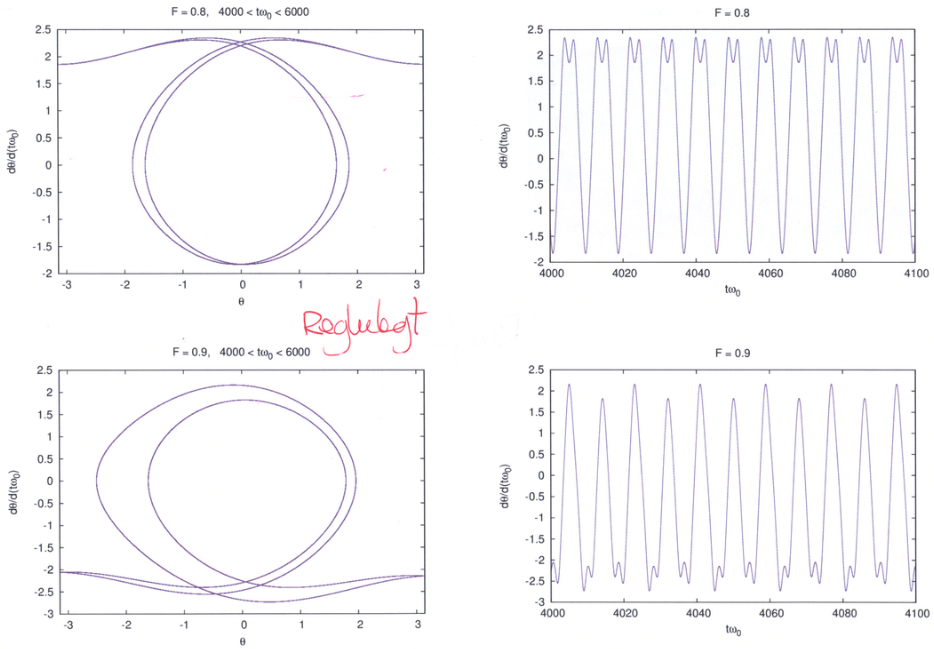


4



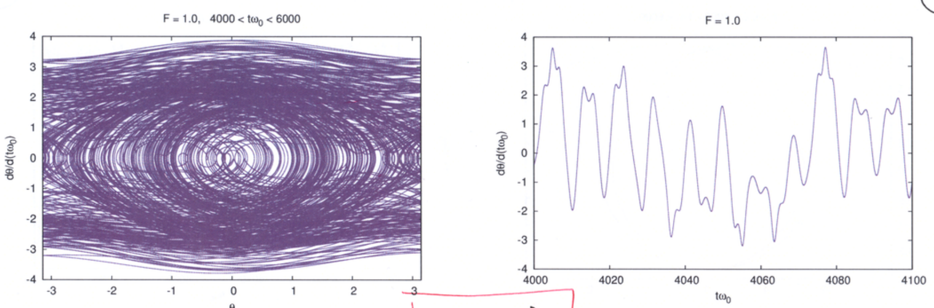
Ringl

5



Reglubegt

6



Ringlað

7

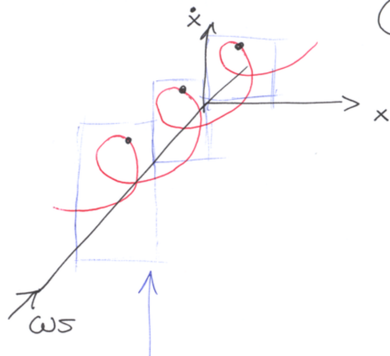
Hér takast á tveir tímaskalar sem ákvarðast af ω_d og ω_0

Fyrir lítið útslag ($F \leq 0,4$) ræður þvingunar tíðnin

því skoðaði Poincaré snið í tíma af $(\dot{x}, x)$ eða $(\dot{\theta}, \theta)$ með

$$\omega s = 2\pi n$$

þá ætti lotubundin hreyfing með einfalda lotu að lenda alltaf á sama stað í $(\dot{\theta}, \theta)$



Poincaré-snið

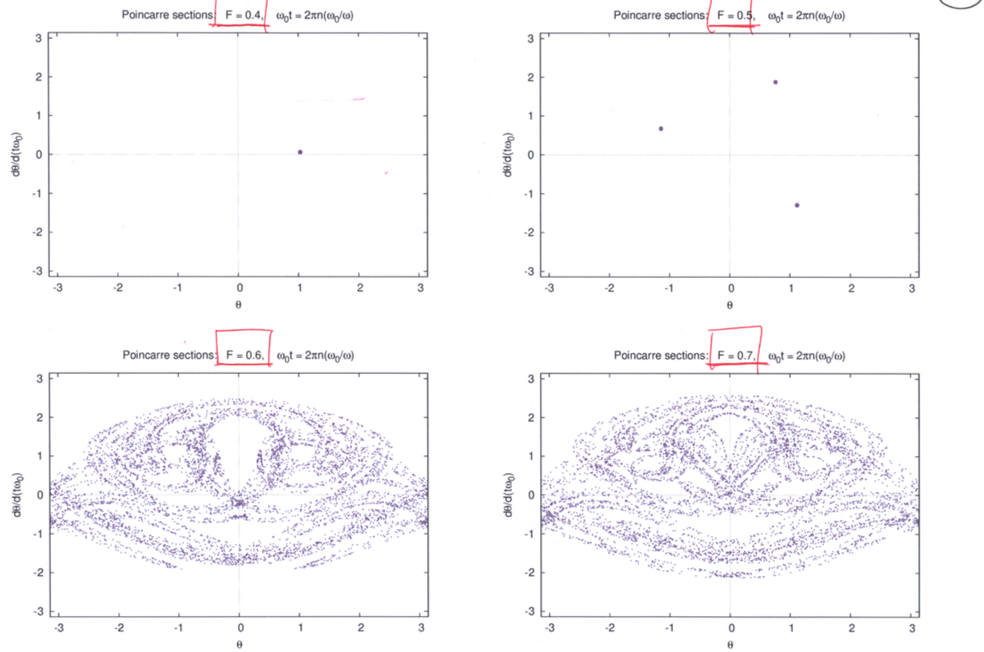
Skoðum fyrir sveifilinn

$\omega s = 2\pi n$, $s = t\omega_0$

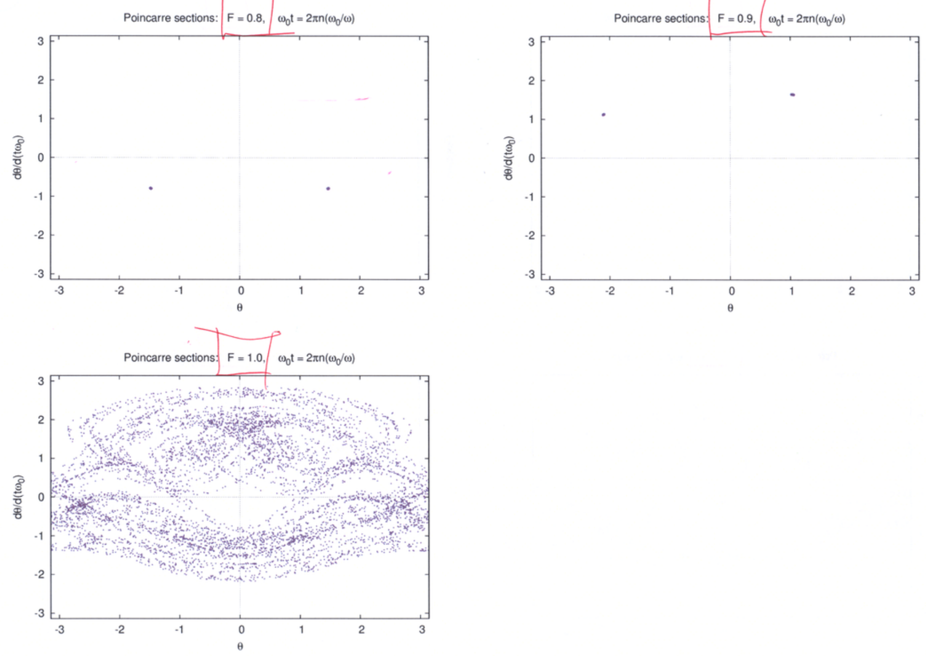
$\omega(\omega_0 t) = 2\pi n$

$$\boxed{\omega_0 t = 2\pi n/\omega = 2\pi n \frac{\omega_0}{\omega_d}}$$

8



9



10

Hvað með skammtakerfi

Sígild rafeind í segulsviði fer á hringhreyfingu í sléttu þvert á segulsviðið

Geislinn er háður B, $r \sim \frac{1}{B}$

Rafeind lýst með skammtafræði í þverstöðu segulsviði fær orkuróf

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar e B}{m}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Landau-stig

strjált orkuróf

Í kjörkerfi eru Landau-stigin óendanlega gröinn

Ef rafeindin er í tvívíðu lotubundnu mætti klofnar hvert Landau-stig sem brotafall af $1/B$

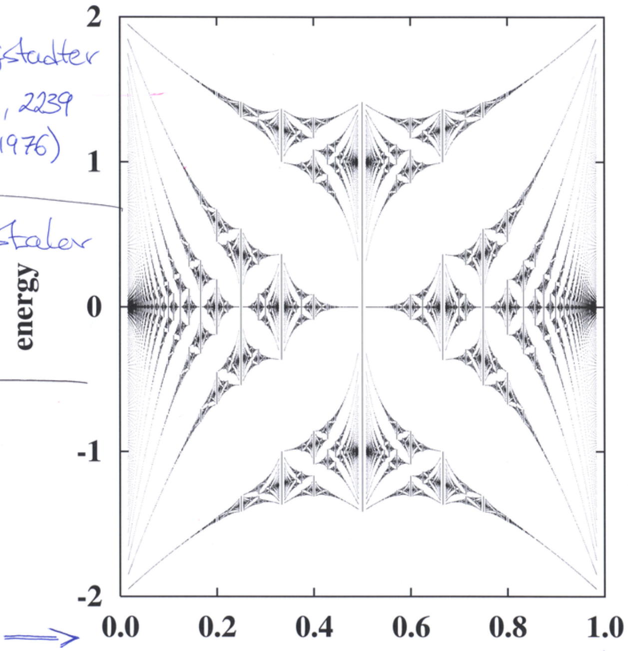
↳ $\boxed{\text{Orkuróf Hofstadter} \\ \text{Fiðrildi Hofstadter}}$

Sjá myndir

11

Fundið af Douglas R. Hofstadter Phys. Rev. 14, 2239 (1976)

Tveir lengdarstalar takast á l_B og a



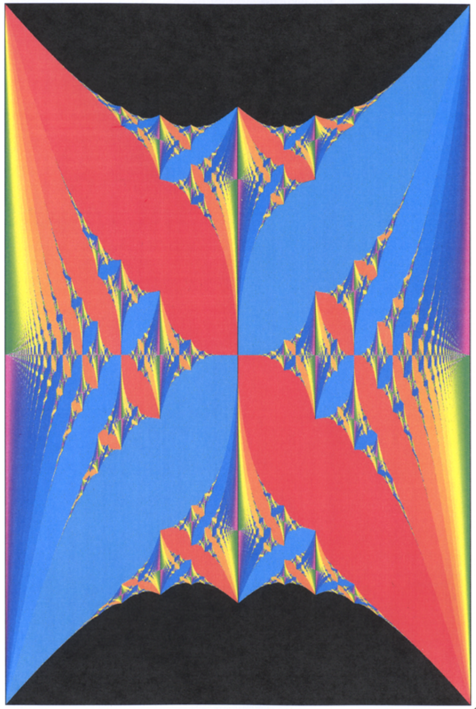
Φ/Φ_0

$\sim 1/\text{segulflæði}$ ⟹

einn flæðiskammtur um lotueiningu

(12)

Orka



fyrir $\frac{\Phi}{\Phi}$ ræða tölu klofnar landan stigið upp í endanlegan fjölda stiga

$\frac{1}{\text{segulflæði}}$

Wikipedia →

(13)

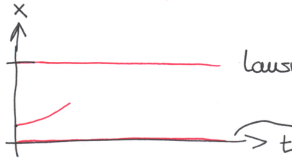
Varpanir

Mjög einfalt dæmi

vaxtarjafna ((logistic)(Verhulst)) fyrir hópa……

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1-x)x$$

heftur vöxtur



lausn fyrir $x(0)=1$

fyrir $x(0)=0$

heftur lausn

$$x(t) = \frac{1}{1+\left[\frac{1}{x(0)}-1\right]e^{-\alpha t}}$$

má umskrifa í ítrekunarjöfnuna

$$x_{n+1} = \alpha(1-x_n)x_n$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1-x)x$$

$$x_{n+1} - x_n = \alpha x_n(1-x_n)\delta t$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n(1-x_n)\delta t$$

$$= x_n\{1+\alpha\delta t - \alpha\delta t x_n\}$$

skilgreinum

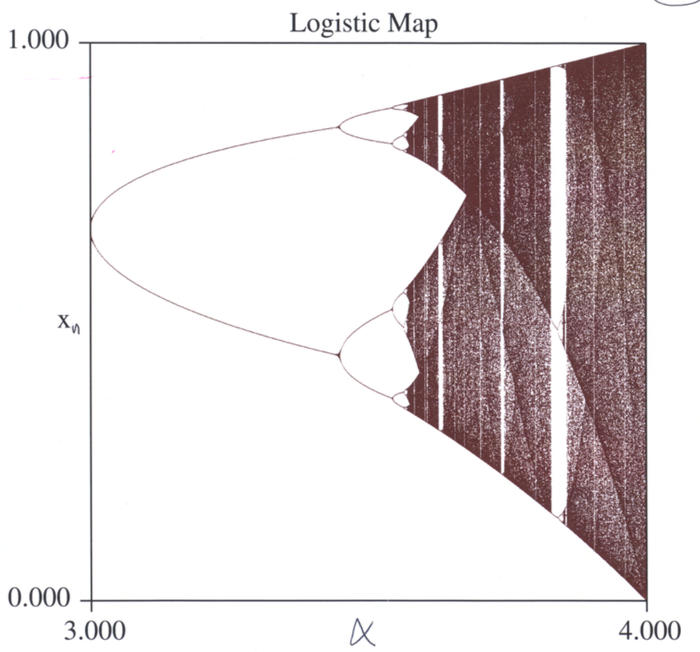
$$y_n = \frac{\alpha\delta t}{1+\alpha\delta t}x_n, \quad \boxed{r = 1+\alpha\delta t}$$

$$\to y_{n+1} = \underbrace{\frac{\alpha\delta t}{1+\alpha\delta t}x_n}_{y_n}\{1+\alpha\delta t - (1+\alpha\delta t)y_n\}$$

$$= r y_n(1-y_n)$$

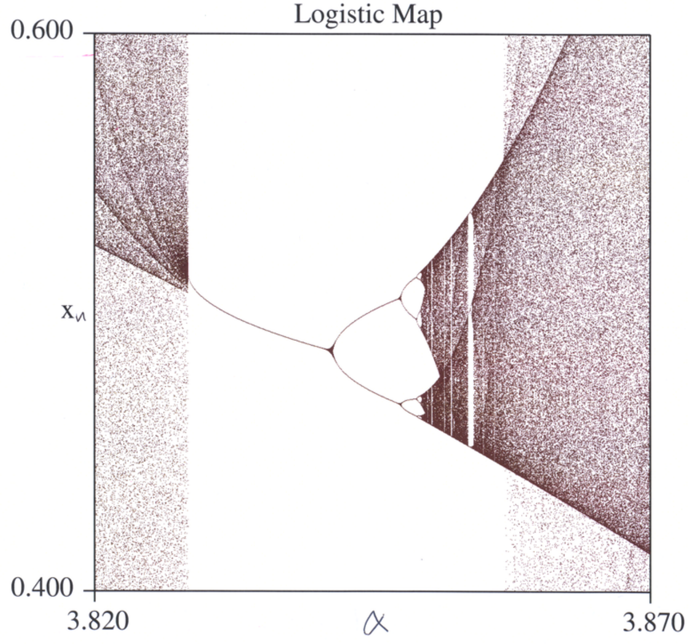
(14)

Anders Sandvik Boston University



(15)

Anders Sandvik Boston University



Lyapunov vísar

upphafsástönd með litlum mun

x_0

$x_0 + \epsilon$

Vísir Lyapunovs λ er stuðull fyrir meðal veldisvísisvöxt fyrir ástöndin á einingartíma. Eftir n ítrekanir er munur

$$d_n = \epsilon e^{n\lambda}$$

lítum á vörpun

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$\lambda < 0$: samleitni

$\lambda > 0$: sundurleitni

setjum $d_0 = \epsilon$

$$d_1 = f(x_0+\epsilon) - f(x_0) \approx \epsilon \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

skilgreiningin gefur þá

$$d_n = f^n(x_0+\epsilon) - f^n(x_0) = \epsilon e^{n\lambda}$$

þ.s. $f^n(x_0) = f(f(\cdots f(x_0)\cdots))$

$$\to \ln\left\{\frac{f^n(x_0+\epsilon)-f^n(x_0)}{\epsilon}\right\} = n\lambda$$

ϵ er smátt $\to$

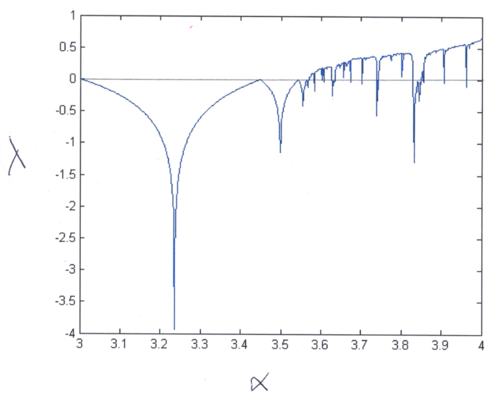
$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\left\{\frac{f^n(x_0+\epsilon)-f^n(x_0)}{\epsilon}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\ln\left|\left.\frac{df^n(x)}{dx}\right|_{x_0}\right|$$

$$\left.\frac{df^n(x)}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{n-1}} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{n-2}} \cdots \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

$$\to \boxed{\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left|\frac{df(x_i)}{dx}\right|}$$

skoðum myndir fyrir „logistic map“



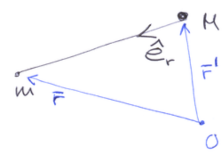
} $\lambda > 0$ engin samleitni

Fakulteta za Strojništvo, Univerza v Ljubljani

Þyngdarfræði

Newton: milli tveggja punktmassa er aðdráttarkraftur

$$F = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r$$



$$G = 6{,}673 \pm 0{,}010 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}\ \mathrm{m^2/kg^2}$$

Ef hluturinn með massa M er með samfellda dreifingu

$$\to M = \int dv\, \rho(\bar r)$$

og

$$\underbrace{\bar F(\bar r)}_{\text{þyngdarkraftur}} = -Gm\int_V \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^2}\underbrace{\frac{\bar r-\bar r'}{|\bar r-\bar r'|}}_{\text{einingarvigur}} d\bar r'^3$$

$\bar r$: Athugandi

$\bar r'$: uppspretta

Þyngdarsvið

$$\bar g = \frac{\bar F}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat e_r$$

eða

$$\bar g(\bar r) = -G\int_V d\bar r'^3 \frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^2}\frac{\bar r-\bar r'}{|\bar r-\bar r'|}$$

Þyngdarsviðið er sambærilegt við rafsvið í rafstöðufræði

Það er geymið

$$\nabla\times\bar g = 0$$

eða

$$\oint_C d\bar l\cdot\bar g = 0$$

Til gamans: Hve langt nær samanburður á þyngdarfræði og rafsegulfræði?

Maxwell

$$\nabla\cdot\bar E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla\cdot\bar B = 0$$
$$\nabla\times\bar E = -\frac{\partial}{\partial t}\bar B$$
$$\nabla\times\bar H = \bar J + \frac{\partial}{\partial t}\bar D$$
$$\bar D = \epsilon\bar E$$
$$\bar H = \frac{1}{\mu}\bar B$$
$$\bar F_e = q(\bar E + \bar v\times\bar B)$$

Almennu sviðsjöfnur Einsteins -> gefur línulegar

$$\nabla\cdot\bar g = -4\pi G\rho$$
$$\nabla\cdot\bar b = 0$$
$$\nabla\times\bar g = -\frac{\partial}{\partial t}\bar b$$
$$\nabla\times\bar b = -\frac{4\pi G}{c^2}\bar J_g + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\bar g$$

$$\bar F_g = m(\bar g + 4\bar v\times\bar b)$$

segulhluti þyngdarsviðs

GPS

þyngdarbylgjur?

En viðhöldum okkur við stöðufræðina

Þyngdarmætti

Samanburður við rafstöðufræðina, geymin kraftar.....

Til er mætti þ.a.

$$\bar g = -\nabla\Phi$$

Vídd

$$[\bar g] = [\bar a] = \frac{L}{T^2} \;\to\; [\Phi] = \frac{L^2}{T^2} \qquad \left([\nabla] = \frac{1}{L}\right)$$

$$\to [m\Phi] = M\frac{L^2}{T^2}$$: vídd orku

Fyrir punktmassa

$$\bar g = GM\frac{\hat e_r}{r^2}$$

ef punktmassinn er í miðju hnitakerfisins

$$\bar g = -\nabla\Phi \;\to\; \Phi = -GM\frac{1}{r}$$

← sleppum heildunarfasta. Munum ávalt hafa áhuga á $\Delta\Phi$

$$\Phi(\bar r) = -G\int_V d\bar r'^3\frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}$$ fyrir samfellda massadreifingu

Vinna ytri krafts/massa til að flytja hann um $d\bar r$

$$dW' = -\bar g\cdot d\bar r = (\nabla\Phi)\cdot d\bar r = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i = d\Phi$$

Stöðuorka

$$U = m\Phi \qquad (U = qV)$$

$$\to \bar F = -\nabla U$$

Lögmál Gauß og jafna Poissons

(6)

Í bókinni er leitt út lögmál Gauß

$$\boxed{\bar\nabla\cdot\bar g = -4\pi G\rho} \quad \text{eða} \quad \boxed{\oint_S \bar g\cdot d\bar s = -4\pi G M}$$

Áður var komið $\bar g = -\bar\nabla\Phi$

$$\to \bar\nabla\cdot(\bar\nabla\Phi) = 4\pi G\rho \quad \text{eða} \quad \boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho}$$

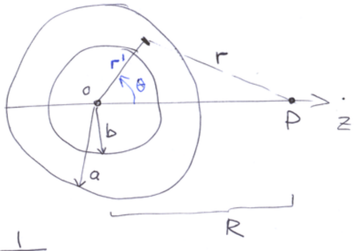
jafna Poissons gefur Φ ef ρ er þekkt

skalar jafna og því oft mjög handhæg í stað vigurjöfnu, en lausnar aðferðir þarfa að æfast og lærast G.IV. ....

Dæmi: þyngdarmættið um og í kúluskel

(7)

Notum $\Phi(\bar r) = -G\int_V d^3r' \dfrac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}$



Setjum miðju hnitakerfis í miðja skel og notum ϕ sem hverfu

$$\Phi(R,0,0) = -2\pi\rho G\int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{1}{r}$$

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\theta$$

$$\to 2r\,dr = 2r'R\sin\theta d\theta \quad \to \sin\theta d\theta\frac{1}{r} = \frac{dr}{r'R}$$

$$\to \Phi(R,0,0) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr$$

Utan skeljar $R>a$

(8)

$$\Phi(R,0,0) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\int_{R-r'}^{R+r'} dr \qquad (R+r'-R+r') = 2r'$$

$$= -\frac{4\pi\rho G}{R}\int_b^a r'^2dr' = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}(a^3-b^3)$$

Massi skeljar $M = \frac{4\pi}{3}(a^3-b^3)\rho \to \boxed{\Phi(R,0,0) = -\frac{GM}{R} \quad R>a}$

utan skeljar er mættið óháð massadreifingu svo fremi hún sé óháð ϕ og θ

↑ má sjá með lögmáli Gauß

staðsetning P m.t.t. ϕ og θ á engu að breyta, valið til þæginda

Innan skeljar: $R<b$

(9)

$$\Phi(R,0,0) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\int_{r_{min}=r'-R}^{r_{max}=r'+R} dr \qquad (r'+R-r'+R)$$

$$= -4\pi\rho G\int_b^a r'dr' = -2\pi\rho G(a^2-b^2)$$

fasti óháður R innan skeljar

Inni í skel: $b<R<a$

$$\Phi(R,0,0) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\left[\int_R^{r'+R}dr + \int_{R-r'}^{R}dr\right]$$

$$= -4\pi\rho G\left\{\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right\}$$

(10)

Reynum stærri aðferð

Notum kúluhnit (r,ϕ,θ) með miðju í miðju skeljar

Getum notað Gauß og reiknað þyngdarsviðið $\bar{g}$, en við höfum $\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho}$

ρ er fasti óháður ϕ og θ, skelin fellur að kúluhnitum → Φ er líka óháð ϕ og θ. Í kúluhnitum er jafnan því

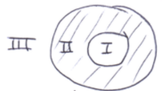
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r)\right\} = 4\pi G\rho$$

Ein breyta eftir skrifum því

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d}{dr}\Phi(r)\right\} = 4\pi r^2 G\rho$$

← heildum ákveðið á þremur svæðum

→ $\rho \neq 0$ aðeins á (II)



Krefjumst samfelldni Φ

(11)

(I): $\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d}{dr}\Phi(r)\right\} = 0$ $\quad r<b$

→ $r^2\frac{d}{dr}\Phi(r) = C_1$: fasti

→ $\frac{d}{dr}\Phi(r) = \frac{C_1}{r^2}$ → $\Phi_I(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 = C_2$

aðeins möguleg lausn fyrir punkt hleðslu → $C_1 = 0$ í I

(III) Samskonar lausn fæst fyrir $r>a$, en með öðrum föstum

$$\Phi_{III}(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

(II) $\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d}{dr}\Phi(r)\right\} = 4\pi r^2 G\rho$ $\quad b<r<a$

→ $r^2\frac{d}{dr}\Phi(r) = \frac{4\pi}{3}r^3G\rho + C_5$, $\frac{d}{dr}\Phi(r) = \frac{4\pi}{3}rG\rho + \frac{C_5}{r^2}$

→ $\Phi_{II}(r) = \frac{4\pi r^2 G\rho}{6} - \frac{C_5}{r} + C_6$

(12)

Skeytum saman í $r=a$, $r=b$

Veljum að $\Phi_{III}(r\to\infty) = 0$ → $C_4 = 0$

$r=a$ $\quad \Phi_{III}(a) = \Phi_{II}(a)$ → $-\frac{C_3}{a} = \frac{4\pi a^2 G\rho}{6} - \frac{C_5}{a} + C_6$

$r=b$ $\quad \Phi_{I}(b) = \Phi_{II}(b)$ → $C_2 = \frac{4\pi b^2 G\rho}{6} - \frac{C_5}{b} + C_6$

4 fastar, tvær jöfnur, þurfum líka samfellu $\bar{g} = -\nabla\Phi$

$\bar{g}$ er aðeins með útþátt (radíal) $\bar{g}\cdot\hat{e}_r = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi$

$r=a$ $\quad \Phi'_{III}(a) = \Phi'_{II}(a)$ → $\frac{C_3}{a^2} = \frac{4\pi a}{3}G\rho + \frac{C_5}{a^2}$

$r=b$ $\quad \Phi'_{I}(b) = \Phi'_{II}(b)$ → $0 = \frac{4\pi b G\rho}{3} + \frac{C_5}{b^2}$

(13)

$$-C_3 + C_5 - aC_6 = \frac{4\pi a^3 G\rho}{6}$$

$$C_2 + \frac{C_5}{b} - C_6 = \frac{4\pi b^2 G\rho}{6}$$

$$C_3 - C_5 = \frac{4\pi a^3 G\rho}{3}$$

$$-C_5 = \frac{4\pi b^3 G\rho}{3}$$

$$C_5 = -\frac{4\pi b^3 G\rho}{3}$$

$$C_3 = \frac{4\pi G\rho}{3}\left\{a^3 - b^3\right\} = M$$

$$-aC_6 = \frac{4\pi a^3 G\rho}{6} + C_3 - C_5 = \frac{4\pi G\rho}{6}\left\{a^3 + 2a^3\right\} = 2\pi G\rho a^3$$

→ $C_6 = -2\pi G\rho a^2$

$$C_2 = \frac{4\pi b^2 G\rho}{6} + C_6 - \frac{C_5}{b} = \frac{4\pi G\rho}{6}\left\{b^2 - \frac{6}{2}a^2 + 2b^2\right\}$$

$$= 2\pi G\rho\left\{b^2 - a^2\right\}$$

því er lausnin

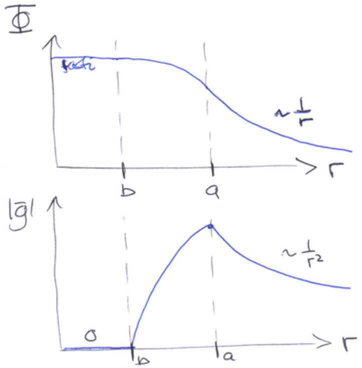
$$
\begin{cases}
\Phi_{I}(r) = -2\pi G\rho\left\{a^2 - b^2\right\} & \underline{r<b} \\
\Phi_{II}(r) = -4\pi G\rho\left\{-\frac{r^2}{6} - \frac{b^3}{3r} + \frac{a^2}{2}\right\} & \underline{b<r<a} \\
\Phi_{III}(r) = -\frac{4\pi G\rho}{3r}\left\{a^3 - b^3\right\} = -\frac{GM}{r} & \underline{r>a}
\end{cases}
$$

og því

$$\bar{g}_{I}(r) = 0$$

$$\bar{g}_{II}(r) = \frac{4\pi\rho G}{3}\left\{\frac{b^3}{r^2} - r\right\}\hat{e}_r$$

$$g_{III}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$$



Hnikun — Hnikareikningur

feikilega vítt svið .... löng saga ..... tölur ......

Við höfum áhuga á verkefnum þar sem t.d. spurt er <u>hvaða fall y(x)</u> gefur heildinu

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\}\,dx$$

<u>útgildi?</u> lág- eða hágildi með mörkin x_1 og x_2 venjulega föst

<u>J: felli</u> x: <u>óháð breyta</u>

$y'(x) = \frac{dy}{dx}$ $y(x)$: <u>háð breyta</u>, háð x-i

y(x) er hnikað til að leita að lausn

Ef við leitum að lágmarki þá munu öll föll y(x) gefa hærra gildi fyrir J en rétta lausnin

"Öll möguleg föll $y = y(\alpha, x)$ þ.a.

$$y(\alpha,x) = y(0,x) + \alpha\eta(x)$$

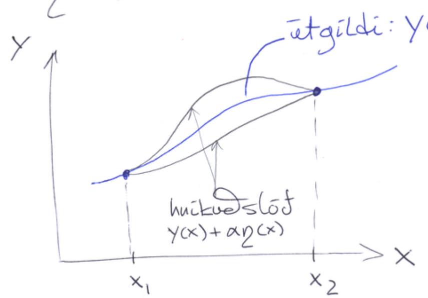
þ.s. $y(0,x)$ er fallið sem við erum að leita að

$y(0,x) = y(x)$

$\eta(x_1) = 0$ η er með samfellda 1. afleiðu

$\eta(x_2) = 0$

J verður <u>felli</u> af <u>hnikunarstikanum</u> α



$$\boxed{J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\{y(\alpha,x), y'(\alpha,x); x\}}$$

þá er nauðsynlegt að

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \quad \leftarrow$$

þýðir líka að J er ekki fall af α', en hærri veldi koma fyrir

til þess að J hafi útgildi fyrir $\alpha = 0$

<u>skoðum</u>

óháð breyta, óháð α

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} dx\, f\{y, y'; x\} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right]$$

berð saman við stikunina

$$y(\alpha,x) = y(x) + \alpha\eta(x) \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta' = \frac{d\eta}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}}\right]$$

hlutheildum $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\,dx$$

4

$$\rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x) \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right]\eta(x)$$

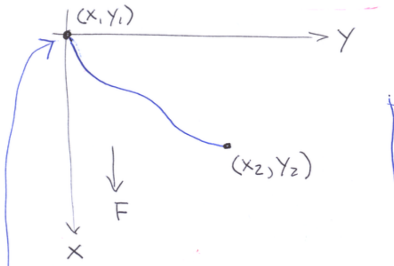
y og y' eru enn föll af α, $\eta(x)$ er hvaða fall sem er með viss skilyrði

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

ákvarðar f — Jafna Eulers (1744)

5

Brachistochrone (stystur tími)



Ögn í föstu kraftsviði kyrr upphaflega í (x_1,y_1)

Getum við fundið lögun brautar milli (x_1,y_1) og (x_2,y_2) sem gefi stystan ferðatíma?

Engin mótstaða, orkuvarðveitt

$\rightarrow T + U =$ fasti

$T = 0$, og veljum $U = 0$

Neðar $T = \frac{1}{2}mv^2$ og $U = -mgx$

þyngdarkraftur

$\rightarrow T + U = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gx$

eða $v = \sqrt{2gx}$

6

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \int_{x_1=0}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\, dx$$

$\frac{dy}{dx} = y'$

fastinn $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ skiptir ekki máli

Við viljum lágmarka tímann

Fallið sem á að heilda er $f(y';x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$

Jafna Eulers var

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

til að lágmarka heildið

hér $-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

eða $\frac{\partial f}{\partial y'} =$ fasti $= \frac{1}{\sqrt{2a}}$

þar sem a er nýr fasti

7

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \text{eða} \quad \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{2a}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{\{2a - x\}} = \frac{x^2}{\{2ax - x^2\}}$$

$$\rightarrow dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{eða} \quad y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

Skiptum á breytu $x = a(1-\cos\theta) \rightarrow dx = a\sin\theta\, d\theta$

$$y = \int \frac{a(1-\cos\theta)a\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2a^2(1-\cos\theta) - \{a(1-\cos\theta)\}^2}} = \int \frac{a(1-\cos\theta)a\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)}}$$

$$= \int a\{1-\cos\theta\}d\theta = a\{\theta - \sin\theta\} + C$$

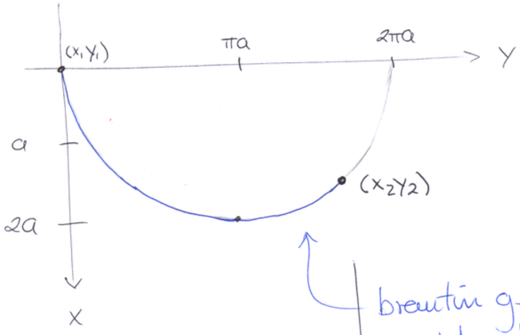
heildunarfasti

8

Stikuðu jöfnur <u>hjólboga</u> (Cycloid) eru

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a(1-\cos\theta) \\ y &= a(\theta - \sin\theta) \end{aligned}}$$

því $C=0$ ef $(x_1,y_1)=(0,0)$

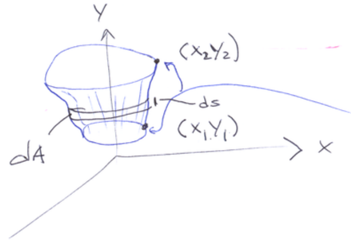


brautin getur verið þ.a. lægsti punktur hennar liggi neðar en endapunkturinn (x_2y_2)

9

Annað frægt dæmi

Tveimur punktum (x_1y_1) og (x_2y_2) snúið um y-ás – hvert er <u>minnsta yfirborðið</u> sem tengir hringina sem myndast?



sápuhimnur, ... (catenoid)

$$dA = 2\pi x\,ds = 2\pi x\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\to A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} dx\, x\sqrt{1+y'^2}$$

veljum $f = x\sqrt{1+y'^2}$ og reynum í $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \to \frac{d}{dx}\left\{\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\} = 0$$

$$\to \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a \text{ fasti}$$

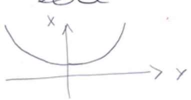
10

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a \to y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2(1+y'^2) \to \left\{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2\right\}y'^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

$$\to y' = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{eða} \quad y = \int\frac{a\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

með lausn $\quad y = a\,\mathrm{Arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + b$ heildunarfasti

eða



$$\boxed{x = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

lýsir <u>catenoid</u> yfirborði (keðjuyfirborð, keðjuferill)

Er lausnin alltaf útgildi, lág- eða hámark?
Sjá: Calculus of Variations
Robert Weinstock, Dover (1952)
kafli 3-7, bls 30-31.

lausn líka fyrir keðju hangandi milli tveggja punkta

11

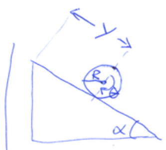
Nokkrar háðar breytur

Ef $\quad f = f\{y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \ldots; x\}$

þá fæst

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\eta_i(x)$$

$$\to \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$



$y = R\theta$

$g(y;\theta) = y - R\theta = 0$

<u>Velta</u>

<u>Ytri skorður</u> lesa sjálf 6.6

Ef ytri skorður tengja breyturnar (háðar) $g_j\{y_i;x\} = 0$

þá fæst

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \sum_j \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0}$$

Lagrange óákvarðaðir margfaldarar

(12)

skorður geta líka verið sem

$$\sum_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i} dy_i = 0$$

eða föst lengd jaðars (isoperimetric)

$$J[y] = \int_a^b f\{y,y';x\}dx \qquad \begin{array}{l} y(a)=A \\ y(b)=B \end{array}$$

með skorðum
$$K[y] = \int_a^b g\{y,y';x\}dx = \ell \leftarrow \text{lengd jaðars}$$

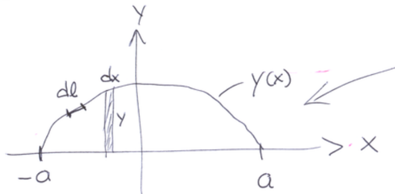
$y(x)$ er útgildi $\int_a^b (f+\lambda g)dx$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (*)$$

$y(a)=A$
$y(b)=B$
$K[y]=\ell$

(13)

Verkefni Dídóar (ein útgáfa)



jaðar lengd ℓ
hvaða $y(x)$ gefur mestan flöt?

$$J = \int_{-a}^{a} y\,dx \qquad \begin{array}{l} y(-a)=0 \\ y(a)=0 \end{array} \qquad K = \int_{-a}^{a} d\ell = \ell$$

$$K = \int_{-a}^{a}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{1+y'^2} = \ell \qquad \begin{array}{l} y(x) = y = f \\ g(x) = \sqrt{1+y'^2} \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$(*) \rightarrow 1 - \lambda\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\} = 0$$

(14)

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\} = \frac{1}{\lambda} \quad \rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + C_1$$

fasti

$$\rightarrow dy = \frac{\pm(x-C_1)dx}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}} \quad \rightarrow y = \mp\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2} + C_2$$

$$\rightarrow (x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2$$

jaðar hrings

$C_1 = 0$ $\quad \lambda = a$ — vegna jaðarskilyrða
$C_2 = 0$

δ-táknun

verkefni
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} dx\,d\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

styttum skrift
$$\boxed{\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y}$$

(15)

með
$$\boxed{\begin{array}{l} \delta J \equiv \dfrac{\partial J}{\partial \alpha}d\alpha \\ \delta y \equiv \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}d\alpha \end{array}}$$

útgildi
$$\boxed{\delta J = \delta\int_{x_1}^{x_2} f\{y,y';x\}dx = 0}$$

Ef mörkin eru föst

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\delta f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

$$\delta y' = \delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

$$\rightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right)dx$$

hlutheildun

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\delta y\,dx$$

1

Lögmál Hamiltons — Aflfræði Lagrange

Af öllum mögulegum leiðum fyrir kerfi frá einum punkti til annars á ákveðnu tímabili (með skorðum), er raunverulega leiðin sú sem lágmarkar tímaheildi munar hreyfi- og stöðuorku

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2}\{T-U\}\,dt = 0}$$

Ef $T = T(\dot{x}_i)$, $U = U(x_i)$

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$$

$$\to \delta\int_{t_1}^{t_2} L(x_i,\dot{x}_i)\,dt = 0$$

2

Við notum því vitneskju úr síðasta fyrirlestri, hnitum og sjáum að hreyfijöfnurnar fást með

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0}$$

Hreyfijafna Lagrange

L: fall Lagrange

* skoðum dæmi ← t.þ.a sjá að þetta virkar
* Kynnum alhnit
* skoðum flókin dæmi

generalized coordinates

sjáum að jöfnur lagrange með alhnitum einfalda viðfangsefni aflfræðinnar fyrir okkur

3

Hreintónasveifill

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

og $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\to -kx - m\ddot{x} = 0$$

$$\to \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

þekkt niðurstaða

Pendúll

$$L = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\to -mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\to \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

þurftum ekki að athuga $\hat{e}_\theta$, θ var meðhöndlað eins og x!

4

Engir Kraftar með flóknum vigurstrúktúr! Eingöngu unnið með stalar stærðir!

Generalized coordinates — Alhnit

Hugsum okkur n-agnir $\to$ $3n$ hnit í 3D-rúmi

m - af þessum hnitum eru ekki óháð, einhverjar agnir gætu verið fastar saman, að þær eru skorðaðar við braut

$\to s = 3n - m$ óháð hnit (frelsisgráður)

m - skorður

Veljum einhver s - óháð hnit, ekki til einkvæmt val

$\to q_i$: alhnit ← þurfa ekki sömu vídd, $x, \theta, \ldots$

$\to$ alhraðar $\dot{q}_i$: stalar stærðir

(5)

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \qquad \alpha = 1,2,\dots n$$
$$\dot q_j = \dot q_j(x_{\alpha,i}, \dot x_{\alpha,i}, t) \qquad i = 1,2,3 \quad (x,y,z)$$
$$j = 1,2,3,\dots s$$

$s = 3n - m$

$+$ skorður $f_k(x_{\alpha,i},t) = 0 \qquad k = 1,2,\dots,m$

Dæmi um hnit

Eind á hálfhveli $\qquad x^2+y^2+z^2-R^2 = 0, \quad z \geq 0$

Gætum reynt $\quad q_1 = \frac{x}{R}, \quad q_2 = \frac{y}{R}, \quad q_3 = \frac{z}{R}$

$\longrightarrow \quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad \leftarrow$ ekki óháð

Veljum þá t.d. q_1 og q_3 og eina jöfnu fyrir skorður

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

enda hreyfing á 2D-fleti

Fyrir 1D pendúl eru x og y háð $\longrightarrow$ alhnit θ

(6)

Lagrange í alhnitum

L er stakarfall $\quad + \quad L = T - U$

$\longrightarrow$ L er varðveitt við hnitaskipti

{Til eru ummyndanir á L sem varðveita hreyfijöfnurnar}

Breyting á núllpunkti U breytir ekki hreyfijöfnu

$$L = L(q_j, \dot q_j, t)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot q_j, t)\,dt = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) = 0$$

$j = 1,2,\dots s$

(7)

* Við krefjumst (ekki nauðsyn, en annars þarf útvíkkun) að allir kraftar, nema skorður séu geymnir

* krefjumst skorða $\quad f_k(x_{\alpha,i},t) = 0$

$\uparrow$ heilnefndar skorður
holonomic

Ef $\quad f_k(x_{\alpha,i}) = 0$

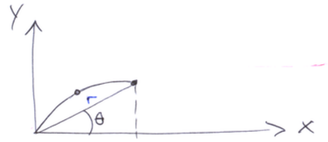
$\uparrow$ fastar skorður (fixed)
stjarfnefndar (scleronomic)

annars með t eru þær flæðinefndar (rheonomic)

Skoðum dæmi

(8)

Fallhreyfing, 2D, í tveimur hnitakerfum



$$T = \tfrac{1}{2} m \{\dot x^2 + \dot y^2\}$$
$$U = mgy$$

$$L = T - U = \tfrac{1}{2} m \{\dot x^2 + \dot y^2\} - mgy$$

x: $\quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = 0 \;\longrightarrow\; 0 - \ddot x = 0 \;\longrightarrow\; \ddot x = 0$

y: $\quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right) = 0 \;\longrightarrow\; -mg - m\ddot y = 0$

$\longrightarrow \quad \ddot y + g = 0$

En í pólhnitum?

Rifjum upp $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\to \quad v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$

því fæst

$$L = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right\} - mgr\sin\theta$$

r: $\quad \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \to +mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta - m\ddot{r} = 0$

$$\to \boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0}$$

θ: $\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \to -mgr\cos\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0$

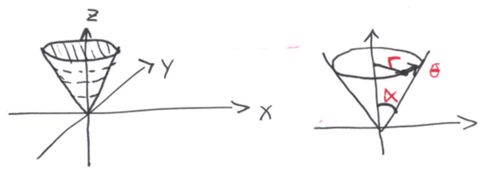
Hér er greinilegt að það er þægilegra að nota x og y sem alhnit

$$\to \boxed{r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta = 0}$$

(9)

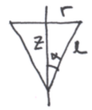
Dæmi

Ögn hreyfist í þyngdarsviði inni í keiluyfirborði



Eðlilegt að nota sívalnings-hnit r, θ, z sem alhnit

Við höfum skorður



$$\left.\begin{aligned} l\cos\alpha &= z \\ l\sin\alpha &= r \end{aligned}\right\} \to \frac{z}{r} = \cot\alpha \quad \text{eða} \quad z = r\cot\alpha$$

(1.101) $\quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$

$$\to v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha$$

$$= \dot{r}^2\left\{1 + \cot^2\alpha\right\} + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + (r\dot{\theta})^2$$

Hér sést að $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gefur einmitt 2D-kerfi í sléttu

(10)

$$U = mgz = mgr\cot\alpha$$

skorðurnar hafa skilið eftir tvö alhnit, enda hreyfing á yfirborði, eða í

$$\to L = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + (r\dot{\theta})^2\right\} - mgr\cot\alpha$$

θ: $\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \to 0 - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$

$$\to \boxed{mr^2\dot{\theta} = C \leftarrow \text{fasti}}$$

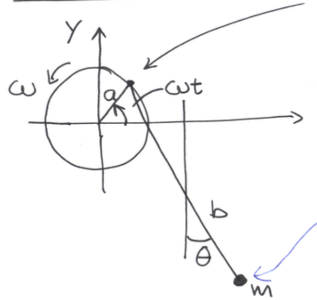
$\hookleftarrow$ hverfiþungi agnarinnar um z-ás

r: $\quad \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \to +r\dot{\theta}^2 m - mg\cot\alpha - m\frac{\ddot{r}}{\sin^2\alpha} = 0$

$$\to \boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\frac{1}{2}\sin(2\alpha) = 0}$$

(11)

Dæmi



pendúll festur við jaðar hjóls sem snýst með jafnri hornferð ω

{ Hver vill reyna að finna krafta hér? }

$$x = a\cos(\omega t) + b\sin\theta$$
$$y = a\sin(\omega t) - b\cos\theta$$

$$\to \quad \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t) + b\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\dot{y} = a\omega\cos(\omega t) + b\dot{\theta}\sin\theta$$

því er θ eina alhnitið hér

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos(\omega t) + b\left\{\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right\}$$
$$\ddot{y} = -a\omega^2\sin(\omega t) + b\left\{\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right\}$$

(12)

13

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\} - mgy$$

$$= \frac{m}{2}\Big\{a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega\big[-\sin(\omega t)\cos\theta + \cos(\omega t)\sin\theta\big]\Big\}$$

$$- mg\{a\sin(\omega t) - b\cos\theta\}$$

Ef $\omega = 0$ fáum við $\ddot{\theta} + \frac{g}{b}\sin\theta = 0$

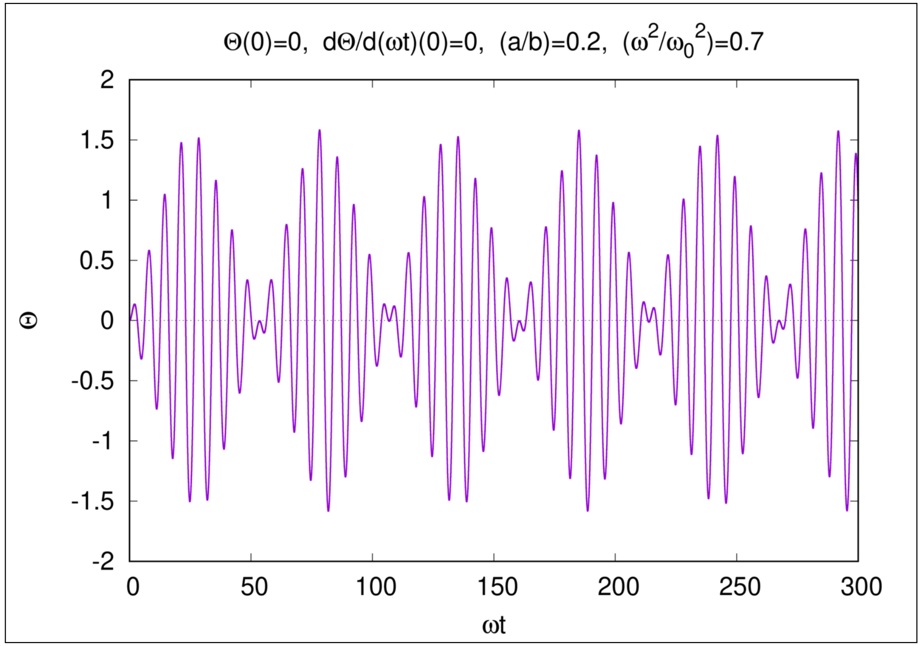
$$\to L = \frac{m}{2}\Big\{a^2\omega^2 + (b\dot{\theta})^2 + 2b\dot{\theta}a\omega\sin(\theta - \omega t)\Big\}$$

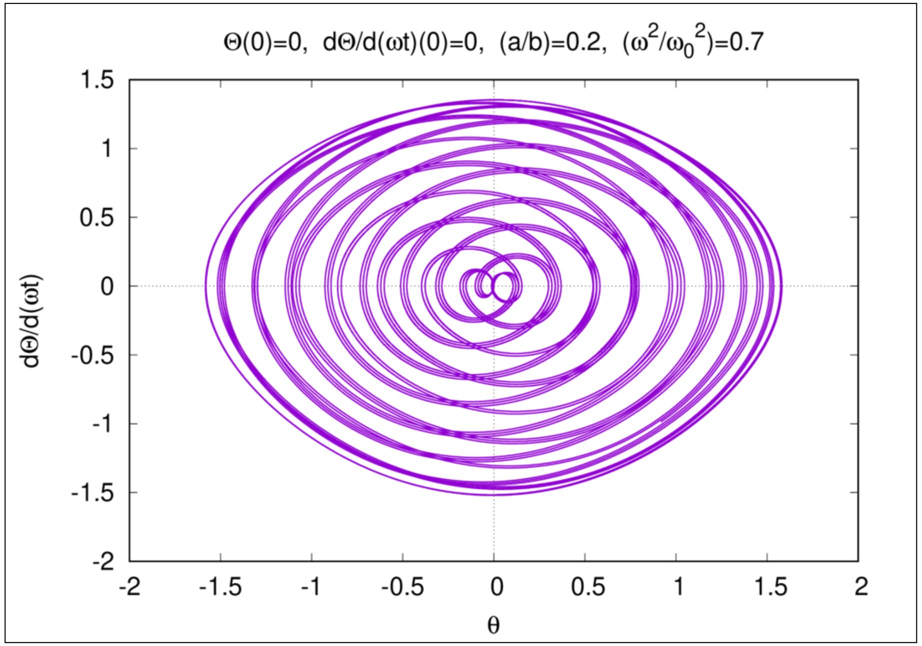
$$- mg\{a\sin(\omega t) - b\cos\theta\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \to mb\dot{\theta}a\omega\cos(\theta - \omega t) - mgb\sin\theta$$

$$- mb^2\ddot{\theta} - mba\omega(\dot{\theta} - \omega)\cos(\theta - \omega t)$$

$$\to \boxed{\ddot{\theta} - \frac{\omega^2 a}{b}\cos(\theta - \omega t) + \frac{g}{b}\sin\theta = 0}$$

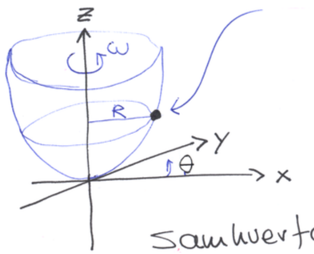




1

Skoðum enn aflfræði Lagrange

Dæmi



Fleygbogi $z = cr^2$

Massi m getur runnið eftir fleygboganum þegar hraðinn er ω og massinn snýst með geisla R finnum C

Samhverfa $\to$ notum sívalnings hnit (r, θ, z)

$$\to \boxed{\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + (r\dot{\theta})^2\} \\ \text{og} \quad U &= mgz \end{aligned}}$$

Hnitin (r, θ, z) eru ekki óháð vegna fleygbogaskorðu

$z = cr^2 \to \dot{z} = 2cr\dot{r}$ og $\theta = \omega t \to \dot{\theta} = \omega$

(2)

Því er eina óháða hnitið r

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left\{\dot r^2 + (2cr\dot r)^2 + (r\omega)^2\right\} - mgcr^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0$$

$$m\left\{4c^2 r\dot r^2 + r\omega^2 - 2gcr\right\} - \underbrace{\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(2\dot r + 8c^2r^2\dot r\right)\right\}}_{= m\{\ddot r + 8c^2 r\dot r^2 + 4c^2r^2\ddot r\}} = 0$$

$$= \boxed{\ddot r\left\{1+4c^2r^2\right\} + \dot r^2\left\{4c^2 r\right\} + r\left\{2gc-\omega^2\right\} = 0}$$

Hreyfijafna fyrir kerfið

(3)

Ef massinn snýst með $r = R = \text{fasti} \rightarrow \dot r = 0,\ \ddot r = 0$ og hreyfijafnan er þá

$$R\left\{2gc - \omega^2\right\} = 0 \rightarrow C = \frac{\omega^2}{2g}$$

Jöfnur Lagrange með óákveðnum margföldurum

Ein smá viðbót

vegna hraða

Skorður af tegund $f(x_{\alpha,i}, \dot x_{\alpha,i}, t) = 0$ eru ekki heilnefndar nema þær megi heilda t.a. gefa $f(x_{\alpha i}, t) = 0$

þá eru þær nefndar hálfheilnefndar (hálfnefndar?)

Athugum $\sum_i A_i \dot x_i + B = 0$ almennt ekki heildanleg

(4)

nema ef $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $B = \frac{\partial f}{\partial t}$, $f = f(x_i, t)$

því þá eru skorðurnar

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0$$

og heildun leiðir til $f(x_i,t) - C = 0$ heildunarfasti

því eru skorður

$$\boxed{\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0} \quad (*) \quad \text{og} \quad \boxed{f_k(x_{\alpha,i}, t) = 0}$$

jafngildar

Áður sáum við að skorður

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad \begin{Bmatrix} j = 1,2,\dots s \\ k = 1,2,\dots m \end{Bmatrix}$$

leiða til

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0} \quad (**)$$

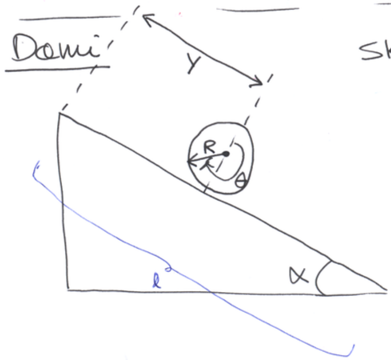
(5)

Vegna þess að hnitunum krefst að byrjun og endir ferils séu við fastan tíma leiðir (*) til sömu jöfnu Lagrange (**)

Í jöfnu (**) eru $\boxed{Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}}$

alkraftar vegna skorða

Dæmi: Skífa veltur niður skábretti



$$T = \frac{1}{2}M\dot y^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot y^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot\theta^2$$

því $I = \frac{1}{2}MR^2$

6

$U = Mg(l-y)\sin\alpha$

$$\rightarrow \boxed{L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(y-l)\sin\alpha}$$

En hnitin y og θ eru háð gegnum veltiskorður

$$f(y,\theta) = y - R\theta = 0$$

Því standa tvær leiðir til boða

1 { Við getum notað skorðurnar til að fækka hnitum í eitt, y eða θ

eða

2 { Notað bæði hnitin, y eða θ, með Lagrange margföldurum

Reynum báðar

7

2

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\rightarrow Mg\sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \end{aligned}$$

3 jöfnur, 3 óþekktar stærðir, y, θ, λ

og frá skorðunum $y = R\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y}$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{2g\sin\alpha}{3}}$$ eða líka $\lambda = -\frac{Mg\sin\alpha}{3}$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}}$$ Hreyfijafna

8

Ef skífan veltur ekki (rennur) þá fæst

$$\ddot{y} = g\sin\alpha$$

→ veltan minnkar hröðunina í $\frac{2}{3}$

Því hlýtur viðnámskrafturinn sem veldur veltunni að vera $\boxed{-\frac{Mg}{3}\sin\alpha}$ ← $= \lambda$

Skoðum alkrafta

$$Q_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{Mg}{3}\sin\alpha \leftarrow$$ Viðnámskraftur

↕

$$Q_\theta = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{MgR}{3}\sin\alpha \leftarrow$$ vægi hans, enda tengt θ

9

1

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(y-l)\sin\alpha$$

↑ engin θ kemur fyrir

Veltuskorður $y - R\theta = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$

Setjum inn í L

$$\rightarrow L = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + Mg(y-l)\sin\alpha$$

Ein breyta eftir, y er heppilegt alhnit

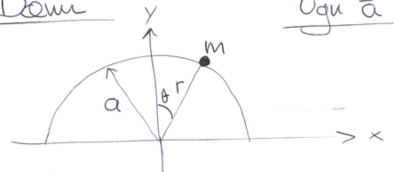
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow Mg\sin\alpha - \frac{3}{2}M\ddot{y} = 0$$

eða $\boxed{\ddot{y} = \frac{2g}{3}\sin\alpha}$

Sama hreyfijafna og áður, en engar upplýsingar um alkrafta

(10)

Dæmi — Ögn á kúluhveli



Viljum finna hornið þegar ögnin losnar frá hvelinu

Ögnin þarf að geta losnað $\longrightarrow$ alhnit r, θ

Skorður: á hveli $f(r,\theta) = r - a = 0$

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\left\{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right\} - mgr\cos\theta}$$

Notum

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \longrightarrow \boxed{mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta - m\ddot r + \lambda = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \boxed{mgr\sin\theta - mr^2\ddot\theta - 2mr\dot r\dot\theta = 0}$$

(11)

Skorður $r = a \longrightarrow \dot r = 0,\ \ddot r = 0$

$$\longrightarrow ma\dot\theta^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$mga\sin\theta - ma^2\ddot\theta = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{g}{a}\sin\theta}$$

sem við getum heildað

Notum

$$\ddot\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d\dot\theta}{dt} = \frac{d\dot\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta}}$$

$$\dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta \quad \text{eða} \quad \dot\theta\, d\dot\theta = \frac{g}{a}\sin\theta\cdot d\theta$$

heildum

$$\int_0^{\dot\theta}\dot\theta'\, d\dot\theta' = \frac{g}{a}\int_0^{\theta} d\theta' \sin\theta'$$

$$\longrightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} = -\frac{g}{a}\left\{\cos\theta - 1\right\}$$

(12)

En, við fengum áður $ma\dot\theta^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0$

Eyðum $\dot\theta^2$ úr ~~þessum~~ tveimur jöfnum

$$2ma\left\{\frac{g}{a} - \frac{g}{a}\cos\theta\right\} - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$\longrightarrow 2mg\{1 - \cos\theta\} - mg\cos\theta = -\lambda$$

$$\longrightarrow \lambda = mg\{3\cos\theta - 2\}$$

sem er alkraftur vegna skorðu

$\longrightarrow$ ögnin losnar þegar $\lambda = 0$

þegar $\cos\theta_0 = \frac{2}{3} \longrightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0{,}84$ rad

(13)

Lesa sjálf um jafngildi Newtons og Hamiltons framsetningu aflfræði í 7.6

Newton	Hamiltons
Kraftar, hraði, hverfiþungi	skalarstærðir í staðarrúminu
$\longrightarrow$ vigrar	Orka
	hnikun, lágmörkun heildis
Afleiðuframsetning	
$\downarrow$	
Orsakalögmál	

Endurspeglast í mism. framsetningum á skammtafræði

Um Hreyfiorku

Munum tengsl hnita við alhnit

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1,2,\dots n \\ i = 1,2,3 \\ j = 1,2,\dots s \end{array}$$

Í föstum Kartískum hnitum er hreyfiorkan

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{3} m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2$$

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

$$\to \quad \dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{j,k}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2\sum_j \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\right)^2$$

því verður hreyfiorkan

$$T = \sum_\alpha\sum_{ijk}\left[\frac{m_\alpha}{2}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right] + \sum_\alpha\sum_{ij}\left[m_\alpha\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\dot{q}_j\right] + \sum_\alpha\sum_i\left\{\frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}\right)^2\right\}$$

sem hefur formið

$$T = \sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_j b_j\dot{q}_j + C$$

engin tími

Ef kerfið er stjarfnefnt (scleronomic) svo $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$

þá er $\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0$ og $b_j = 0$, $C = 0$

$$\to \quad \boxed{T = \sum_{jk} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k}$$

óháð annarsstigs jafna af ferðinni í alhnitum

skoðum

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk}\dot{q}_k + \sum_j a_{jl}\dot{q}_j$$

$$\to \sum_l \dot{q}_l\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{kl} a_{lk}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{jl} a_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l$$

og því

$$\boxed{\sum_l \dot{q}_l\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T}$$

notum setningu Eulers

sértilfelli

Setning Eulers

Ef $f(y_k)$ er óháð fall af y_k af gráðu n

$$\to \sum_k y_k\frac{\partial f}{\partial y_k} = n f$$

Varðveislulögmál

Ef tíminn er allsstaðar einsleitur

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \to \quad \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

notum jöfnur Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \quad \to \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

og því

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j\left\{\dot{q}_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right\} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$\to \quad \frac{d}{dt}\left\{L - \sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right\} = 0$$

fasti í tíma

Köllum

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{fasti}$$

Veljum $U = U(x_{\alpha,i})$ óháð $\dot{x}_{\alpha,i}$

höfum valið

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$$
$$q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

óháð tíma

$$\longrightarrow U = U(q_j) \text{ og } \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\boxed{H = \underbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{2T} - \{T-U\} = T+U = \text{fasti}}$$

Fall Hamiltons

ummyndanir hnita óháð tíma
U er óháð hraða

skriðþungi

Rúmið er einsleitt í tregðukerfi

→ L fyrir lokað kerfi er óbreytt ef rúminu er hnikað $\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}$

Notum Kartísk hnit hér $L = L(x_i, \dot{x}_i)$

$$\delta\vec{r} = \sum_i \hat{e}_i \delta x_i$$

↑ algerlega óháð t

$$\delta \dot{x}_i = \delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta x_i) \equiv 0$$

$$\longrightarrow \delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$

óháðar hnikanir δx_i

$$\longrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow \text{Lagrange jöfnur} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{fasti} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left\{\frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2\right\} = m\dot{x}_i = p_i = \text{fasti}$$

Við sjáum því að

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

Í þessum hnitum er jöfnur Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}}$$

Í kartísum hnitum eru þessar jöfnur jafngildar jöfnum Lagrange

Í einsleitu rúmi, má með örsmæðar snúningi

$$\delta\vec{r} = \delta\hat{\theta} \times \hat{r}$$

sýna að

$$\vec{r} \times \vec{p} = \text{fasti}$$

Hverfiþunginn er varðveittur

Tregðukerfi	Tími einsleitur	rúm einsleitt	rúm einsleitt
L	óháð t	óháð örsmæðar færslu	óháð örsmæðar snúning
Varðveitt Emmy Noether	Heildarorka	skriðþungi	hverfiþungi

Jöfnur Hamiltons

Í Kartísum hnitum höfum við

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Við víkkum þetta út fyrir alhnit

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$$

Jöfnur Lagrange verða því

$$\boxed{\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}}$$

Samtímis verður

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

→ notum til að finna $\dot{q}_j = \dot{q}(q_k, p_k, t)$

þá sést að

$$\boxed{H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)}$$

(*)

hnitaskipti (Legendre ummyndun)

$$\to dH = \sum_k \left\{\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k\right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

En samkvæmt (*)

$$dH = \sum_k \left\{\dot q_k dp_k + p_k d\dot q_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=\dot p_k} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}_{=p_k} d\dot q_k\right\} - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$= \sum_k \left\{\dot q_k dp_k - \dot p_k dq_k\right\} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

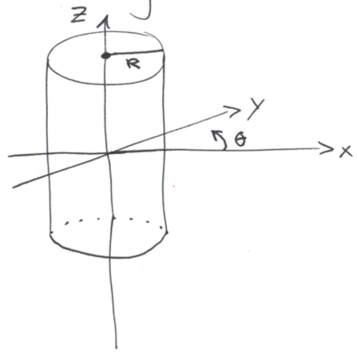
$$\to \boxed{\begin{aligned} \dot q_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dot p_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}} \quad \text{og} \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{og} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hreyfijöfnur Hamiltons

Kórjöfnur hreyfingar

Skoðum tvö dæmi

(1) "Ögn hreyfist á yfirborði sívalnings"



í mætti $U = \frac{1}{2} k r^2$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$= R^2 + z^2$

$$v^2 = \overset{=0}{\dot R^2} + (R\dot\theta)^2 + \dot z^2$$
$$= (R\dot\theta)^2 + \dot z^2$$

$$\to T = \frac{m}{2}\left\{(R\dot\theta)^2 + \dot z^2\right\}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left\{(R\dot\theta)^2 + \dot z^2\right\} - \frac{k}{2}\left\{R^2 + z^2\right\}$$

alhnitin eru θ og z og alskriðþungarnir eru

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z$$

Kerfið er lokað, geymið og hnitaskiptin eru óháð tíma

$$\boxed{\begin{aligned} H(z, p_\theta, p_z) &= T + U \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 \end{aligned}}$$

Liðnum $\frac{1}{2}kR^2$ er sleppt, því hann er fasti

Reynum hreyfijöfnur Hamiltons

$$\dot p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

$$\dot p_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot z = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

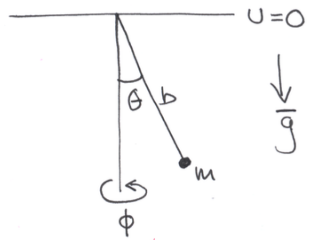
$$\to \boxed{p_\theta = mR^2\dot\theta = \text{fasti}}$$

Hverfiþunginn um z-ás er fasti

$$\to m\ddot z + kz = 0$$

$$\to \boxed{\ddot z + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = 0}$$

(2) Kúlupendúll



Alhnitin eru θ og ϕ

$$T = \frac{m}{2}\left\{(b\dot\theta)^2 + (b\sin\theta\,\dot\phi)^2\right\}$$

$$U = -mgb\cos\theta$$

Alskriðþungar

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mb^2\dot\theta$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mb^2\sin^2\theta\cdot\dot\phi$$

$$\to \dot\theta = \frac{p_\theta}{mb^2} \quad \text{og} \quad \dot\phi = \frac{p_\phi}{mb^2\sin^2\theta}$$

notum í T

$$\boxed{\begin{aligned} H &= T + U \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2\sin^2\theta} - mgb\cos\theta \end{aligned}}$$

(13)

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2}$$

$$\dot\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mb^2\sin^2\theta}$$

$$\dot p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mb^2\sin^3\theta} - mgb\sin\theta$$

$$\dot p_\phi = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

höfðum $\dot\theta = \frac{p_\theta}{mb^2}$

$\to \dot p_\theta = \ddot\theta\, mb^2$

því fæst

$$\ddot\theta - \frac{p_\phi^2\cos\theta}{(mb^2)^2\sin^3\theta} + \frac{g}{b}\sin\theta =$$

Sem mátti líka finna með jöfnum Lagrange eða litum á jöfnur Hamiltons sem fyrsta stigs jöfnuhneppi . . .

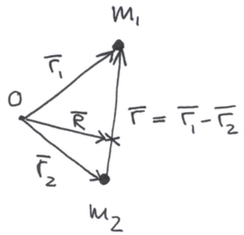
ϕ kemur ekki fyrir í H

$\to$ p_ϕ er fasti um samhverfuásinn, hverfiþungi pendúlsins er varðveittur

(1)

Hreyfing í miðlægum krafti

Tveir massar – skertur massi



tveir massar $\to$ 3 hnit $\times$ 2

$\to$ 6 breytur

Þægilegt að nota massamiðju-hnit $\bar R$ og innbyrðishnit

$\bar r \equiv \bar r_1 - \bar r_2$

Mættið er aðeins fall af

$r = |\bar r_1 - \bar r_2|$

$$L = \frac{1}{2}\left\{m_1|\dot{\bar r}_1|^2 + m_2|\dot{\bar r}_2|^2\right\} - U(r)$$

Ef við höfum ekki áhuga á hreyfingu $\bar R$ (CM) notum

$$m_1\bar r_1 + m_2\bar r_2 = 0$$

$$\bar r = \bar r_1 - \bar r_2$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar r \end{pmatrix}$$

(2)

$$\to \quad \bar r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\bar r$$

$$\bar r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\bar r$$

notum í

$$T = \frac12\left\{m_1|\dot{\bar r}_1|^2 + m_2|\dot{\bar r}_2|^2\right\}$$

$$= \frac12\left\{\frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right\}|\dot{\bar r}|^2$$

$$= \frac12\left\{\frac{(m_1+m_2)m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right\}|\dot{\bar r}|^2$$

$$= \frac12\left\{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\right\}|\dot{\bar r}|^2 = \frac12\mu|\dot{\bar r}|^2$$

ef $\boxed{\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}$

μ er kallaður skertur massi (e. reduced mass)

því verður nú

$$\boxed{L = \frac12\mu|\dot{\bar r}|^2 - U(r)}$$

$\uparrow$ einungis innbyrðis hnitið $\bar r$ kemur fyrir

(3)

Varðveisla – fyrsti heildisfasti hreyfingarinnar

(e. first integral of motion)

Vegna þess að $U = U(r)$ með lengd en ekki stefnu

$\to$ snúningur um ás í gegnum mættismiðju breytir engu

$\bar L = \bar r\times\bar p$ = fasti $\to$ hreyfing í sléttu því $\bar r$ og $\bar p$ verða að liggja í sömu sléttu þvert á $\bar L$

$\uparrow$ hverfiþungi

$$\to \boxed{L = \frac12\mu\left\{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right\} - U(r)} \leftarrow \text{Lagrange fall}$$

$$\to \dot p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) \to p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \mu r^2\dot\theta = \text{fasti}$$

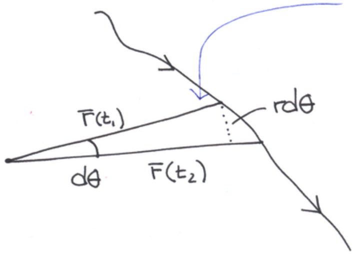
Þá er fyrsti heildisfastinn, gefum nafn

$$\boxed{\ell = \mu r^2 \dot\theta = \text{fasti}}$$

en

$\frac{1}{2} r \cdot r d\theta$

flötur $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$



→ flatar ferð

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot\theta$$

$$= \frac{\ell}{2\mu} = \text{fasti}$$

Annað lögmál Keplers

$\boxed{\text{Ekki vegna } \frac{1}{r^2} \text{ krafts}}$

Enginn viðnámskraftur

→ $T + U = E = \text{fasti}$

→ $E = \frac{\mu}{2}\left\{ \dot r^2 + (r\dot\theta)^2 \right\} + U(r)$

$$= \frac{\mu}{2}\dot r^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Sem við getum nýtt í hreyfijöfnu

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U(r)\right) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}}$$

→ $$d\theta = \frac{\pm \frac{\ell}{r^2} dr}{\mu\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-U(r)\right) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}}}$$

notum

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot\theta}{\dot r} dr$$

notum $\dot\theta = \frac{\ell}{\mu r^2}$

→ $d\theta = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{dr}{\dot r}$

$$\theta(r) = \int \frac{\pm \frac{\ell}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu\left\{E - U(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right\}}}$$

ℓ : fasti

→ $\dot\theta$ hefur alltaf sama formerki

→ θ vex eða minnkar einhalla með tíma

Formleg lausn, nákvæm greinilausn er aðeins þekkt fyrir nokkur sértilfelli. T.d. fyrir $F(r) \sim \frac{1}{r^n}$ eru lausnir þekktar í elliptískum heildum og föllum. $n = 1, -2, -3$ gefur lausnir í hornaföllum

H.O. og $\frac{1}{r^2}$

má nýta til að skoða samhverfur og vissa eiginleika

Ekki þægilegt form fyrir tölulega reikninga. Þar er hreyfijafnan á afleiðuformi betri

Skoðum

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0$$

með

$$L = \frac{\mu}{2}\left\{\dot r^2 + (r\dot\theta)^2\right\} - U(r)$$

þá fæst hreyfijafnan

$$\mu\left\{\ddot r - r\dot\theta^2\right\} = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$$

sem er heppileg til tölulegra reikninga með $\dot\theta = \frac{\ell}{\mu r^2}$

En, skoðum breytuskipti

$$u \equiv \frac{1}{r}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot r}{\dot\theta}$$

→ $\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{\ell}\dot r$

ef notað er $\dot\theta = \frac{\ell}{\mu r^2}$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\mu}{\ell}\dot r\right)$$

$$= \frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{\ell}\dot r\right) = -\frac{\mu \ddot r}{\ell\dot\theta}$$

$$= -\frac{\mu^2}{\ell^2} r^2 \ddot r$$

(8)

Umritum því

$$\ddot{r} = -\frac{\ell^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{\mu^2}u^3$$

$$\underbrace{\mu\{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\} = F(r)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{\ell^2u^2}F(1/u)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r)}$$

Dæmi

Þekkjum braut $r(\theta)$ hvaða kraftur veldur henni?

$$r(\theta) = ke^{\alpha\theta}$$

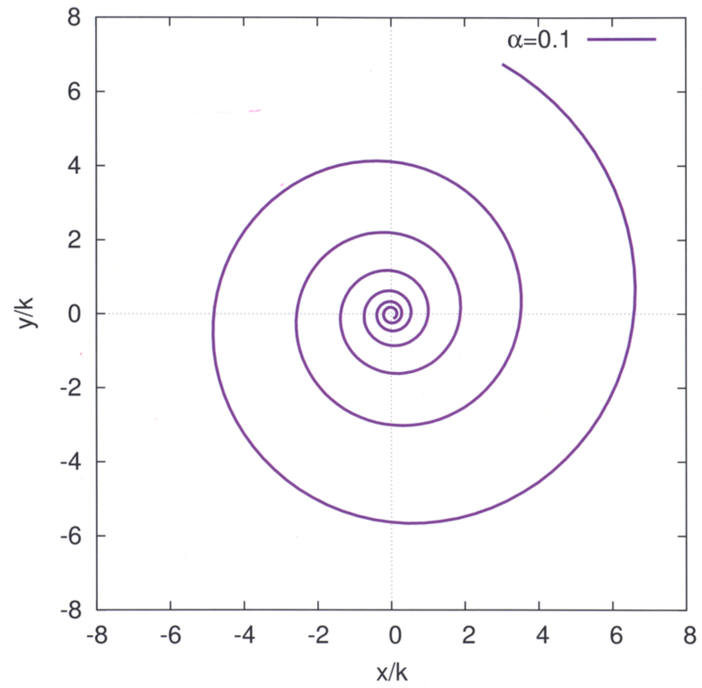
Logragormur, sjá mynd á næstu síðu

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{-\alpha\theta}}{k}\right) = -\frac{\alpha e^{-\alpha\theta}}{k}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha^2 e^{-\alpha\theta}}{k} = \frac{\alpha^2}{r}$$

$$\to \boxed{F = -\frac{\ell^2}{\mu r^2}\left\{\frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r}\right\} = -\frac{\ell^2}{\mu r^3}\{\alpha^2+1\}}$$

(9)



$r(\theta) = ke^{\alpha\theta}$

(10)

Hvernig er brautin háð tíma?

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2} = \frac{\ell}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}} \to e^{2\alpha\theta}d\theta = \frac{\ell}{\mu k^2}dt$$

heildunar fasti

heildum $$\frac{e^{2\alpha\theta}}{2\alpha} = \frac{\ell t}{\mu k^2} + \frac{C}{2\alpha} \to e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha\ell t}{\mu k^2} + C$$

eða $$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha}\ln\left\{\frac{2\alpha\ell t}{\mu k^2} + C\right\} \qquad r(\theta) = ke^{\alpha\theta}$$

$$\to r(t) = \sqrt{\frac{2\alpha\ell}{\mu}t + k^2C}$$

$$U(r) = -\frac{\ell^2(\alpha^2+1)}{2\mu r^2} \quad \text{ef} \quad U(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Þá fæst $E = 0$ sem kemur ekki á óvart þegar brautin er stöðvuð, massinn er ekki bundinn,

(11)

Brautir í miðlægu mætti

fyrir útþátt hraðans fékkst

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}}$$

$\to \dot{r} = 0$ þegar

$$E - U(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} = 0$$

Viðsnúningspunktar

venjulega tvær rætur

$\to r_{max}$ og r_{min}

Ef ein rót $\to$ hringbraut

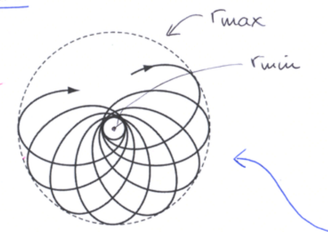


Fig 8-4 Thornton/Marion

Ef hreyfingin er lotubundin þá er talað um lokaða braut

Ef ekki, fæst opin braut

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell\, dr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

ef $\Delta\theta$ er $2\pi\left(\frac{n}{m}\right)$ með n,m heiltölu

$\to$ lokuð braut

$\boxed{\text{fyrir } U(r) \sim r^{n+1} \text{ fást lokaðar ekki hringlaga brautir fyrir } n = -2 \text{ og } +1}$

Miðflótta....

Í stæðunni $\sqrt{E - U - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}}$ er síðasti liðurinn með

vídd orku

$$\frac{\ell^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2$$

Ef við lítum á þetta sem hluta af „stöðuorku"

$$U_c \equiv \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

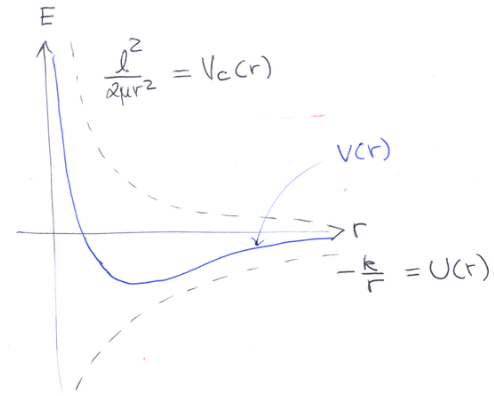
þá fæst „krafter"

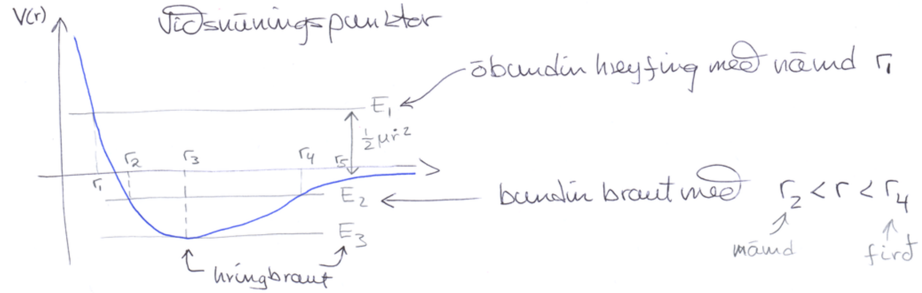
$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$$

gervikrafter – miðflóttakrafter, þá verður virka stöðuorkan

$$V(r) \equiv U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

vex með hverfiþunga





Hreyfing reikistjarna – Kepler

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{\ell}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}} + C$$

$u = \frac{\ell}{r}$, skilgreinum

θ þ.a. $\theta(r_{min}) = 0$

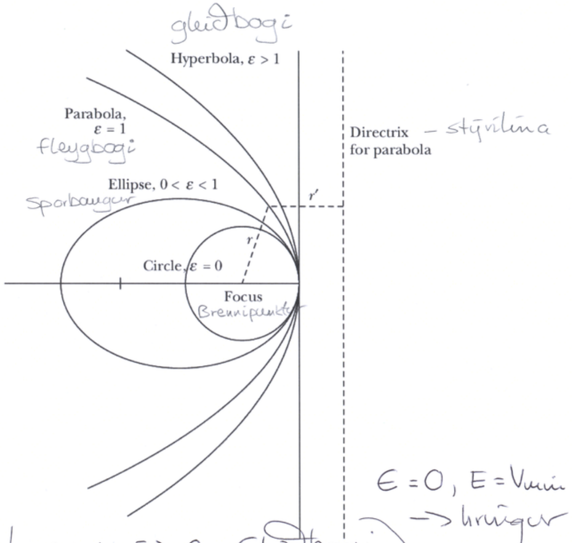
$$\to \cos\theta = \frac{\frac{\ell^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}}$$

ef $\alpha \equiv \frac{\ell^2}{\mu k}$, $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$

$$\to \boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos\theta}$$

ϵ: hringvik

2α: þverbrennistrengur



$\epsilon > 1$, $E > 0$ Gleiðbogi

$\epsilon = 1$, $E = 0$ fleygbogi

$0 < \epsilon < 1$, $V_{min} < E < 0$ Sporbaugur

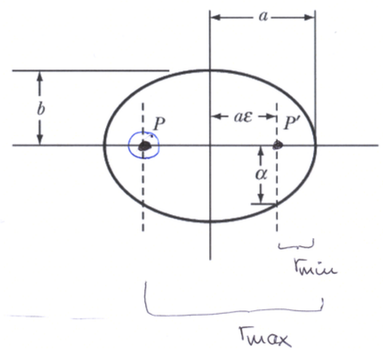
Reikistjörnur – sporbaugar

Langás $a = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$

Skammás $b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}$

Nánd $r_{min} = a(1-\epsilon) = \frac{\alpha}{1+\epsilon}$

Firð $r_{max} = a(1+\epsilon) = \frac{\alpha}{1-\epsilon}$



Lota Flatarhraði

$$dt = \frac{2\mu}{\ell} dA$$

Í einni lotu τ er allur flötur sporbaugsins þakinn

$$\to \int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{\ell}\int_0^A dA'$$

$$\to \tau = \frac{2\mu}{\ell} A = \frac{2\mu}{\ell}(\pi a b)$$

$$= \frac{2\mu}{\ell} \cdot \pi \cdot \frac{k}{2|E|} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$= \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}$$

3

en $b = \sqrt{\alpha a}$

$$\to \boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3}$$

3. lögmál Keplers

Nú er $F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$

$$\to k = G m_1 m_2$$

$$\to \tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$$

Lögmál Keplers

(1) sporbrautir með sól í öðrum brennipunktinum

(2) flatarhraðinn er fasti

(3) $\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3$

Stöðugleiki hringbrauta

Allar kraftftegundir

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}$$

leifa hringbrautir, en hversu stöðugar?

Mættið er þá

$$U(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}}$$

4

Virka mættið er þá

$$V(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

Skilyrði lágmarks í $V(r)$ og því stöðugri hringbraut er

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} > 0$$

þar sem ρ er geisli hringbrautar

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{\ell^2}{\mu \rho^3} = 0$$

$$\to \rho^{n-3} = \frac{\mu k}{\ell^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} = -\frac{nk}{\rho^{n+1}} + \frac{3\ell^2}{\mu\rho^4} > 0$$

$$\to -\frac{nk}{\rho^{n-3}} + \frac{3\ell^2}{\mu} > 0$$

$$\to (3-n)\frac{\ell^2}{\mu} > 0$$

því er ljóst að stöðug hringbraut fæst ef $n < 3$

en er þetta nóg?

5

$$F(r) = -\mu g(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\to \ddot r - r\dot\theta^2 = -g(r)$$

er hreyfijafnan, og með hverfiþunganum

$$\ddot r - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^3} = -g(r)$$

Skoðum truflun um hringbraut með geisla ρ

$r \to \rho + x$, ρ er fasti

$$\to \ddot r \to \ddot x$$

$$\to \ddot x - \frac{\ell^2}{\mu^2\rho^3\left\{1+\left(\frac{x}{\rho}\right)\right\}^3} = -g(\rho+x)$$

gerum ráð fyrir

$$\frac{x}{\rho} \ll 1$$

$$\to \left\{1+\left(\frac{x}{\rho}\right)\right\}^{-3} \simeq 1 - 3\frac{x}{\rho} + \cdots$$

$$g(\rho+x) \simeq g(\rho) + x g'(\rho) + \cdots$$

því fæst

$$\ddot x - \frac{\ell^2}{\mu^2\rho^3}\left\{1 - \frac{3x}{\rho}\right\} \simeq -\left\{g(\rho) + x g'(\rho)\right\}$$

í upphafi $\left.\dot r\right|_{r=\rho} = 0$

$$\left.\ddot r\right|_{r=\rho} = 0$$

$$g(\rho) = \frac{\ell^2}{\mu^2\rho^3}$$

6

Jafnan verður því

$$\ddot x - g(\rho)\left\{1 - \frac{3x}{\rho}\right\} \simeq -\left\{g(\rho) + x g'(\rho)\right\}$$

$$\to \boxed{\ddot x + \left\{\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)\right\} x \simeq 0}$$

Skilgreinum

$$\omega_0^2 = \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)$$

$$\to \ddot x + \omega_0^2 x = 0$$

með lausn

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

Ef $\omega_0^2 < 0$

er lausnin með vaxandi og minnkandi lið

$\to$ óstöðug lausn

$\to$ þurfum $\omega_0^2 > 0$

$$\to \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) > 0$$

$$\to \boxed{\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0}$$

Setjum inn $F(r) = -\frac{k}{r^n}$

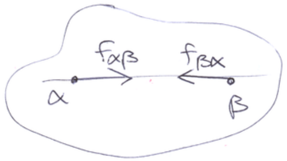
$$\to (3-n)\frac{1}{\rho} > 0$$

7

svo eins og áður $n < 3$

Aflfræði agnakerfis

Innri kraftar agnakerfis



Um krafta tveggja agna á hvor aðra gildir 3. lögmál Newtons

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = -\bar{f}_{\beta\alpha} \qquad \text{veika útgáfan}$$

og Sterka útgáfan

kraftarnir liggja á tengilínu agnanna

sterkari útgáfan er ekki rétt fyrir t.d. rafsegulkrafta

8

Massamiðja

Um heildarmassa kerfis gildir

$$M = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha$$

Eigum eftir að sjá að massamiðja

$$\bar{R} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \bar{r}_\alpha$$

eða

$$\bar{R} = \frac{1}{M}\int \bar{r}\, dm$$

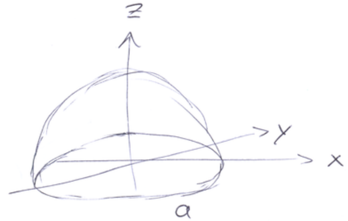
mun leika mikilvægt hlutverk.

Dæmi

Finnum massamiðju gegnheils hálfkúluhvels með einsleitan þéttleika

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{2\pi}{3}a^3}$$

þar sem a er geisli hvelsins



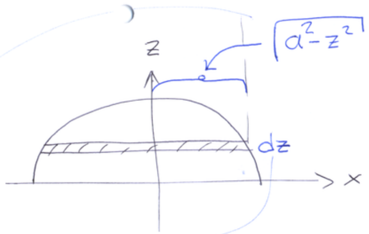
$$X = \frac{1}{M}\int_{-a}^{a} x\, dm = 0 \qquad \text{vegna samhverfu}$$

9

$$Y = \frac{1}{M}\int_{-a}^{a} y\, dm \overset{?}{=} 0$$

en

$$Z = \frac{1}{M}\int_{0}^{a} z\, dm$$



$$dm = \rho\, dV = \rho\pi(a^2 - z^2)\,dz \qquad (\text{„}\rho\pi r^2 h\text{"})$$

$$\to Z = \frac{1}{M}\int_{0}^{a} z\rho\pi(a^2 - z^2)\,dz = \frac{\pi\rho a^4}{4M} = \frac{3}{8}a$$

Skriðþungi

Tökum ögn númer α í kerfinu á hana verkar ytri kraftur $\bar{F}_\alpha^{(e)}$ og innri kraftur

$$\bar{f}_\alpha = \sum_\beta \bar{f}_{\alpha\beta}$$

vegna hinna agnanna í kerfinu

10

Heildarkraftur á ögn α er þá

$$\bar{F}_\alpha = \bar{F}_\alpha^{(e)} + \bar{f}_\alpha$$

3. lögmál Newtons $\to \bar{f}_{\alpha\beta} = -\bar{f}_{\beta\alpha}$

2. lögmál Newtons

$$\dot{\bar{p}}_\alpha = m_\alpha \ddot{\bar{r}}_\alpha = \bar{F}_\alpha^{(e)} + \bar{f}_\alpha$$

$$\to \frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha \bar{r}_\alpha) = \bar{F}_\alpha^{(e)} + \sum_\beta \bar{f}_{\alpha\beta}$$

Summum yfir α

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha = \sum_\alpha \bar{F}_\alpha^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \bar{f}_{\alpha\beta}$$

(11)

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha m_\alpha \bar r_\alpha = M\ddot{\bar R}$$

$$\sum_\alpha \bar F_\alpha^{(e)} = \bar F, \qquad \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \bar f_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha<\beta}\left\{\bar f_{\alpha\beta}+\bar f_{\beta\alpha}\right\} = 0$$

$$\to \boxed{M\ddot{\bar R} = \bar F}$$

Massamiðja kerfisins hreyfist eins og ögn með heildarkraftinn á hana

$$\bar P = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\bar r}_\alpha = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\alpha m_\alpha \bar r_\alpha\right\} = \frac{d}{dt}\left\{M\bar R\right\} = M\dot{\bar R}$$

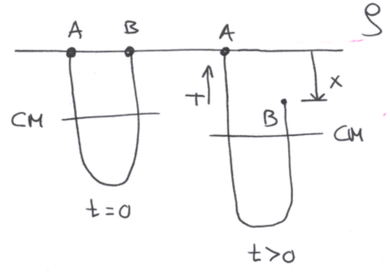
og $\dot{\bar P} = M\ddot{\bar R} = \bar F$

(12)

Dæmi um keðju

lengd b, M

$\rho = \frac{M}{b}$



Reynum tvær aðferðir til að finna T

(1) $\dot P = Mg - T$

skoðum sem 1D hreyfingu

$$P = \rho\left\{\frac{b-x}{2}\right\}\dot x$$

$$\to \dot P = \frac{\rho}{2}\left\{-\dot x^2 + \ddot x(b-x)\right\}$$

Frjálst fall $\to x = \frac{gt^2}{2}$

$$\to \dot x = gt = \sqrt{2gx}$$

$$\ddot x = g$$

$$\to \dot P = \frac{\rho}{2}\left\{-2gx + g(b-x)\right\}$$

$$= \frac{\rho}{2}\left\{gb - 3gx\right\} = Mg - T$$

$$\to T = Mg - \frac{\rho}{2}\left\{gb - 3gx\right\}$$

$$= Mg - \frac{M}{2b}\left\{gb - 3gx\right\}$$

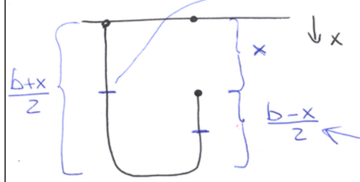
$$= \frac{Mg}{2}\left\{\frac{3x}{b} + 1\right\}$$

(13)

(2) Notum orku, gerum ráð fyrir varðveislu

$$U(t=0) = U_0 = -\frac{\rho g b^2}{4} = \left\{-Mg\frac{b}{4}\right\}$$

Eftir fall um x



$$U = -g\rho\underbrace{\left(\frac{b+x}{2}\right)}_{\text{massi}}\underbrace{\left(\frac{b+x}{4}\right)}_{\text{hæð miðju}}$$

$$-g\rho\underbrace{\left(\frac{b-x}{2}\right)}_{\text{massi}}\underbrace{\left(x + \frac{b-x}{4}\right)}_{\text{hæð}}$$

$$U = -g\rho\left\{\frac{b^2+2bx+x^2}{2\cdot 4} + \frac{b^2-2bx+x^2}{2\cdot 4} + \frac{bx-x^2}{2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}g\rho\left\{b^2 + 2bx - x^2\right\}$$

(14)

Hreyfiorka hægri hlutans í falli

$$K = \frac{\rho}{4}(b-x)\dot x^2$$

Orkan er varðveitt

$$K + U = \frac{\rho}{4}(b-x)\dot x^2 - \frac{1}{4}g\rho\left\{b^2+2bx-x^2\right\} = U_0 = -\frac{\rho g}{4}b^2$$

$$\to \dot x^2 = \frac{g(2bx-x^2)}{b-x} \quad \to 2\dot x\ddot x = \frac{g(2b\dot x - 2x\dot x)}{b-x} + \frac{g(2bx-x^2)}{(b-x)^2}\dot x$$

$$\to \ddot x = g + \frac{g(2bx-x^2)}{2(b-x)^2}$$

notum í

$$\dot P = \frac{\rho}{2}\left\{-\dot x^2 + \ddot x(b-x)\right\} = Mg - T$$

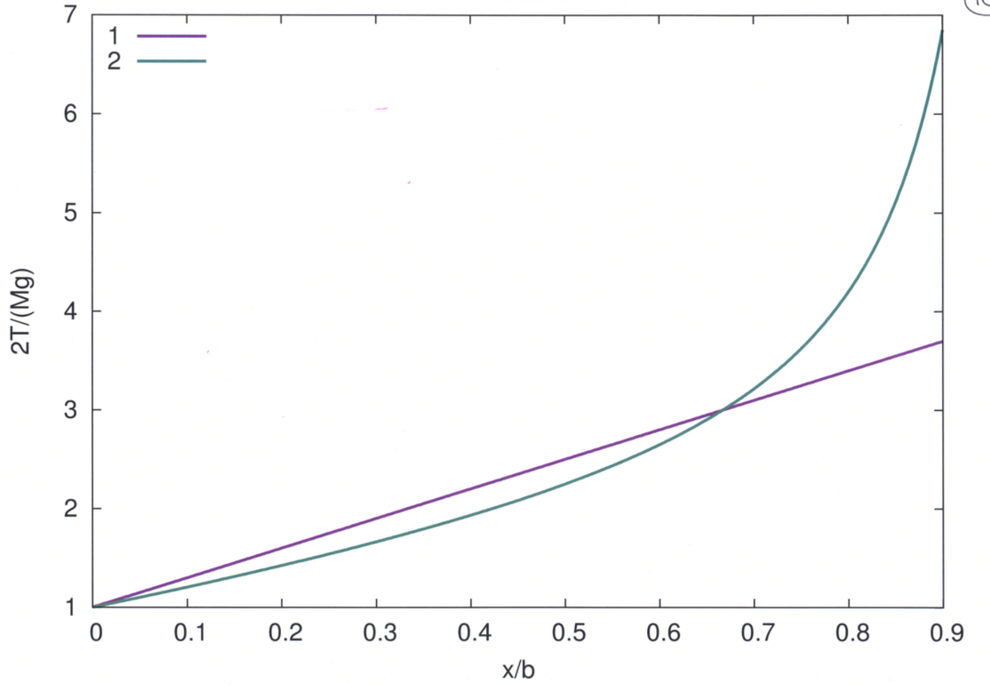
$$\rightarrow \quad \boxed{T = \frac{Mg}{4b}\,\frac{1}{(b-x)}\left\{2b^2 + 2bx - 3x^2\right\}} \quad (2)$$

Þó nokkuð ólíkt fyrri niðurstöðu

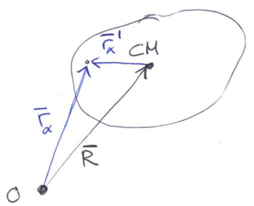
$$T = \frac{Mg}{2}\left\{\frac{3x}{b} + 1\right\} \quad (1)$$

Athugum á grafi

$$\rightarrow \quad \frac{Mg}{2}\left\{\underbrace{\frac{b^2}{b(b-x)}}_{\frac{1}{1-\frac{x}{b}}}\left[1 + \frac{x}{b} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2\right]\right\}$$



Hverfiþungi í agnakerfi



Heppilegt er að greina staðarvigur agnar α í

$$\vec r_\alpha = \vec R + \vec r'_\alpha$$

massamiðju staðs.

m.v. CM

Hverfiþungi agnar α

$$\vec L_\alpha = \vec r_\alpha \times \vec p_\alpha$$

→ Heildar hverfiþungi

$$\vec L = \sum_\alpha \vec L_\alpha = \sum_\alpha \left\{\vec r_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha\right\}$$

notum

$$\vec L = \sum_\alpha (\vec r'_\alpha + \vec R)\times m_\alpha(\dot{\vec r}'_\alpha + \dot{\vec R})$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha\left\{(\vec r'_\alpha \times \dot{\vec r}'_\alpha) + \underbrace{(\vec r'_\alpha \times \dot{\vec R}) + (\vec R \times \dot{\vec r}'_\alpha)}_{\text{skoðum} \;\to\; (1)} + (\vec R \times \dot{\vec R})\right\}$$

$$(1) \;=\; \left\{\sum_\alpha m_\alpha \vec r'_\alpha\right\} \times \dot{\vec R} + \vec R \times \frac{d}{dt}\left\{\sum_\alpha m_\alpha \vec r'_\alpha\right\}$$

en

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec r'_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha(\vec r_\alpha - \vec R) = \sum_\alpha m_\alpha \vec r_\alpha - \vec R \sum_\alpha m_\alpha$$

$$= M\vec R - \vec R M = 0$$

massamiðja kerfis í massamiðjuhnitum

$$\rightarrow \quad \vec L = M\vec R \times \dot{\vec R} + \sum_\alpha \vec r'_\alpha \times \vec p'_\alpha = \underbrace{\vec R \times \vec P}_{} + \underbrace{\sum_\alpha \vec r'_\alpha \times \vec p'_\alpha}_{}$$

→ Heildarhverfiþunginn

= Hverfiþungi CM um O

+ Summa hverfiþunga hverrar agnar um CM

Skoðum breytingar á hverfiþunga $\qquad m_\alpha \dot{\bar r}\times\dot{\bar r} = 0$

$$\dot{\bar L}_\alpha = \dot{\bar r}_\alpha \times \bar p_\alpha + \bar r_\alpha \times \dot{\bar p}$$
$$= \bar r_\alpha \times \left\{\bar F_\alpha^{(e)} + \sum_\beta \bar f_{\alpha\beta}\right\}$$

Fyrir heildina →

$$\dot{\bar L} = \sum_\alpha \dot{\bar L}_\alpha = \sum_\alpha\left\{\bar r_\alpha\times\bar F_\alpha^{(e)}\right\} + \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}\left\{\bar r_\alpha\times\bar f_{\alpha\beta}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha<\beta}\left\{(\bar r_\alpha\times \bar f_{\alpha\beta}) + (\bar r_\beta\times\bar f_{\beta\alpha})\right\}$$

notum $\bar r_{\alpha\beta}\equiv \bar r_\alpha - \bar r_\beta$ og 3. lögmálið $\bar f_{\alpha\beta} = -\bar f_{\beta\alpha}$

$$\sum_{\alpha\beta\neq\alpha}\left\{\bar r_\alpha\times \bar f_{\alpha\beta}\right\} = \sum_{\alpha<\beta}(\bar r_\alpha-\bar r_\beta)\times\bar f_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha<\beta}(\bar r_{\alpha\beta}\times\bar f_{\alpha\beta})$$

En ef við notum sterku útgáfu 3. lögmálsins

þ.a. $\bar f_{\alpha\beta}$ sé í stefnu $\pm\bar r_{\alpha\beta}$ fæst $\bar r_{\alpha\beta}\times\bar f_{\alpha\beta} = 0$

$$\rightarrow \dot{\bar L} = \sum_\alpha\left\{\bar r_\alpha\times\bar F_\alpha^{(e)}\right\} = \sum_\alpha \bar N_\alpha^{(e)} = \bar N^{(e)}$$

→ Ef heildar ytra vogið á agnakerfi um ás er 0. → hverfiþungi kerfisins um ásinn er fastur

Einnig

$$\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}(\bar r_\alpha\times\bar f_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha<\beta}(\bar r_{\alpha\beta}\times\bar f_{\alpha\beta}) = 0$$

→ heildar innra vogið = 0 ef innri kraftarnir eru miðlægir. L-ið verður ekki breytt án ytri krafta

Orka agnakerfis

Hugsum tvö ástönd agnakerfis, 1 og 2.

Til þess að breyta ástandi kerfisins þarf vinnu t.a. flytja agnir til, þá er

$$W_{12} = \sum_\alpha\int_1^2 \bar F_\alpha\cdot d\bar r_\alpha$$

þar sem $\bar F_\alpha$ er heildar krafturinn á ögn α

Skoðum fyrirfram hvað við sjáum

Við getum heildað og fundið W_{12} á mismunandi hátt

Ef ytri og innri kraftar eru geymnir þá sjáum við að lokum að heildarorkan er varðveitt, $\Delta T = -\Delta U$

En, kerfi t.d. tvær eindir tengdar með gormi

Ef við teygjum á gorminum þá getur $\Delta T = 0$, en $\Delta U \neq 0$..., en okkar kraftur er ekki geyminn og.... lokað, opið ...... (massarnir og gormurinn í þyngdarmætti er gott dæmi)

Byrjum því aftur

$$W_{12} = \sum_\alpha\int_1^2 \bar F_\alpha\cdot d\bar r_\alpha$$

$$\bar F\cdot d\bar r = m\frac{d\bar v}{dt}\cdot\frac{d\bar r}{dt}dt = m\frac{d\bar v}{dt}\cdot\bar v\,dt$$
$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\bar v\cdot\bar v)dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt$$
$$= d\left\{\tfrac12 m v^2\right\} \ldots$$

$$= \sum_\alpha\int_1^2 d\left\{\tfrac12 m_\alpha v_\alpha^2\right\} = T_2 - T_1$$

notum $\dot{\bar r}_\alpha = \dot{\bar r}'_\alpha + \dot{\bar R}$

$$\rightarrow \dot{\bar r}_\alpha\cdot\dot{\bar r}_\alpha = v_\alpha^2 = (\dot{\bar r}'_\alpha+\dot{\bar R})\cdot(\dot{\bar r}'_\alpha+\dot{\bar R})$$
$$= (\dot{\bar r}'_\alpha\cdot\dot{\bar r}'_\alpha) + 2(\dot{\bar r}_\alpha\cdot\dot{\bar R}) + (\dot{\bar R}\cdot\dot{\bar R})$$
$$= v'^2_\alpha + 2(\dot{\bar r}'_\alpha\cdot\dot{\bar R}) + V^2$$

$\bar v' = \dot{\bar r}'$

$\bar V$ er CM hraði

(7)

$$T=\sum_\alpha \tfrac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2=\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}v_\alpha'^2+\sum\frac{m_\alpha}{2}V^2+\dot{\bar R}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \bar r_\alpha'}_{=0}$$

$$\rightarrow \boxed{T=\sum\frac{m_\alpha}{2}v_\alpha'^2+\frac{1}{2}MV^2}$$

Hreyfiorka kerfis er jöfn summu hreyfiorku CM og hreyfiorku hvorrar agnar miðað við CM

Skoðum aftur

heildar

$$W_{12}=\sum_\alpha\int_1^2 \bar F_\alpha\cdot d\bar r_\alpha$$

ytri, innri

$$=\sum_\alpha\int_1^2 \bar F_\alpha^{(e)}\cdot d\bar r_\alpha+\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}\int_1^2 \bar f_{\alpha\beta}\cdot d\bar r_\alpha$$

(8)

Kraftarnir eru geymnir

m.t.t. $x_{\alpha,i}$

$$\bar F_\alpha^{(e)}=-\bar\nabla_\alpha U_\alpha$$

$$\bar f_{\alpha\beta}=-\bar\nabla_\alpha \bar U_{\alpha\beta}$$

ekki sömu staker föllin

$$\sum_\alpha\int_1^2 \bar F^{(e)}\cdot d\bar r_\alpha=-\sum_\alpha\int_1^2(\bar\nabla_\alpha U_\alpha)\cdot d\bar r_\alpha=-\sum_\alpha U_\alpha\Big|_1^2$$

$$\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}\int_1^2 \bar f_{\alpha\beta}\cdot d\bar r_\alpha=\sum_{\alpha<\beta}\int_1^2(\bar f_{\alpha\beta}\cdot d\bar r_\alpha+\bar f_{\beta\alpha}\cdot d\bar r_\beta)$$

$$=\sum_{\alpha<\beta}\int_1^2 \bar f_{\alpha\beta}\cdot\underbrace{(d\bar r_\alpha-d\bar r_\beta)}=\sum_{\alpha<\beta}\int_1^2 \bar f_{\alpha\beta}\cdot \underbrace{d\bar r_{\alpha\beta}}$$

(9)

$$\bar U_{\alpha\beta}=\bar U_{\alpha\beta}(|\bar r_\alpha-\bar r_\beta|)$$

$$\rightarrow d\bar U_{\alpha\beta}=\sum_i\left\{\frac{\partial\bar U_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha,i}}dx_{\alpha,i}+\frac{\partial\bar U_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta,i}}dx_{\beta,i}\right\}$$

því $\bar U_{\alpha\beta}=\bar U_{\beta\alpha}$

$$=\underbrace{(\bar\nabla_\alpha\bar U_{\alpha\beta})}_{-\bar f_{\alpha\beta}}\cdot d\bar r_\alpha+\underbrace{(\bar\nabla_\beta\bar U_{\alpha\beta})}_{=\bar\nabla_\beta\bar U_{\beta\alpha}=-\bar f_{\beta\alpha}=\bar f_{\alpha\beta}}\cdot d\bar r_\beta$$

$$\rightarrow =-\bar f_{\alpha\beta}\cdot(d\bar r_\alpha-d\bar r_\beta)$$

$$=-\bar f_{\alpha\beta}\cdot d\bar r_{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow\sum_{\alpha,\beta\neq\alpha}\int_1^2 \bar f_{\alpha\beta}\cdot d\bar r_\alpha=-\sum_{\alpha<\beta}\int_1^2 d\bar U_{\alpha\beta}=-\sum_{\alpha<\beta}\bar U_{\alpha\beta}\Big|_1^2$$

(10)

því fæst

$$W_{12}=-\sum_\alpha U_\alpha\Big|_1^2-\sum_{\alpha<\beta}\bar U_{\alpha\beta}\Big|_1^2$$

því er til heildar mættis orka kerfisins

$$U=\sum_\alpha U_\alpha+\sum_{\alpha<\beta}\bar U_{\alpha\beta}$$

innri orka

$$\rightarrow W_{12}=-U\Big|_1^2=U_1-U_2$$

og með fyrri niðurstöðu

$$\boxed{T_2-T_1=U_1-U_2}$$

eða

$$T_1+U_1=T_2+U_2$$

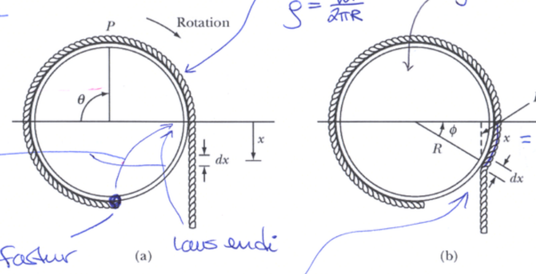
$$\boxed{E_1=E_2}$$

Heildarorka geymins kerfis er föst

Dæmi, reipi á hjóli í þyngdarsviði

upphafsstaða

Finnum hornferð hjóls



þyngdarkraftar framkvæmir vinnu

Hversu mikla vinnu þurfum við að framkvæma til að vefja reipið aftur að hjólinu?

Hve langt þarf að lyfta dx ?

$= \text{bogalengd} - R\sin\phi$

$= x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)$

$\underline{\text{Vinna þyngdarkrafts fyrir dx}} = \rho\, dx\, g \left\{ x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right\}$

Vinna fyrir θ $\rightarrow$ $W(\theta) = \int_0^{R\theta} \rho g \left\{ x - R\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right\} dx$

$$W(\theta) = \rho g R^2 \left\{ \frac{\theta^2}{2} + \cos\theta - 1 \right\}$$

Þessi vinna þyngdarkrafts fer öll í hreyfiorku

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M (R\dot\theta)^2}_{\text{hjól}} + \underbrace{\frac{1}{2} m (R\dot\theta)^2}_{\text{reipi}}$$

$$\rightarrow \frac{mgR}{2\pi}\left\{ \frac{\theta^2}{2} + \cos\theta - 1 \right\} = \frac{1}{2}(m+M)(R\dot\theta)^2$$

$$\rightarrow \dot\theta^2 = \frac{mg(\theta^2 + 2\cos\theta - 2)}{2\pi R(m+M)}$$

Hluti á hjólinu, og annar sem hangir. Báðir eru hér því v^2 er óháð stefnu og hraði í θ-átt og x-átt er sá sami $R\dot\theta$

Ófjaðrandi árekstur

upphaf: $m_1 \longrightarrow \bar u_1$ $\quad m_2 \longrightarrow \bar u_2$

endir: $m_1 \longrightarrow \bar v_1$ $\quad m_2 \longrightarrow \bar v_2$

$$Q + \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$Q = 0$: Fjaðrandi, hreyfiorka er varðveitt (engin mótstaða)

$Q > 0$: Orkugæfur árekstur, hreyfiorka eykst

$Q < 0$: Orkukræfur árekstur, hreyfiorka minnkar

Atlag (impulse)

2. lögmál Newtons gildir allan áreksturinn, en krafturinn er ekki nákvæmlega þekktur

$$\bar F = \frac{d}{dt}(m\bar v)$$

en atlagið $\int_{t_1}^{t_2} \bar F\, dt \equiv \bar P$, $\quad \Delta t = t_2 - t_1$

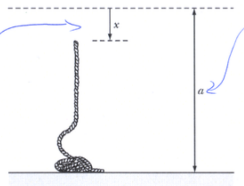
má meta út frá breytingum á skriðþunga

Skoðum dæmi

Dæmi

Hver er krafturinn á borðið þegar reipið hefur fallið um x

Reipi með lengd a og massaþéttleika ρ fellur á borð



vegna reipis á borðinu

$mg = \rho x g$

en hvað með atlagið eða atlagskraftinn

$$F_{impulse} = \frac{dp}{dt}$$

á dt fellur $\rho \overbrace{v\,dt}^{dx}$ á borðið

$$\to dp = (\overbrace{\rho v\,dt}^{dm})\, v = \rho v^2 dt$$

$$\to \frac{dp}{dt} = \rho v^2 = F_{impulse}$$

fyrir fallið gildir

$$v^2 = 2gx$$

$$\to F_{impulse} = \rho v^2 = 2\rho x g$$

heildar krafturinn á borðið er því

$$F = F_g + F_{impulse} = \rho x g + 2\rho x g$$

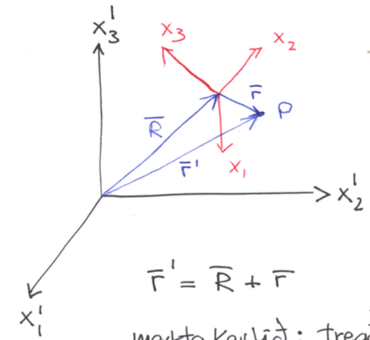
$$\boxed{F = 3\rho x g}$$

sem er 3-faldur kraftur þess sem liggur á borðinu

Hreyfingu lýst utan tregðukerfis

Aðallega hér kerfi sem snýst miðað við tregðukerfi — yfirborð jarðar

Setjum upp tvö hnitakerfi



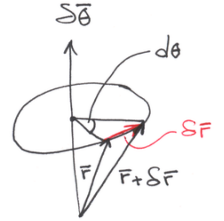
$$\bar r' = \bar R + \bar r$$

merkta kerfið: tregðukerfi

Ómerkta kerfið: ekki tregðukerfi

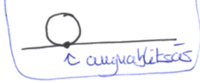
$\bar R$: staðsetning snúningshnit-kerfis

Örsmæðar hliðrun má alltaf lýsa sem örsmæðar snúning um augnabliksás



$$d\bar r = d\bar\theta \times \bar r$$

t.d. hjól sem veltur



Hér, ef x_i-kerfið snýst um $\delta\hat\theta$

$$(d\bar r)_{fixed} = d\bar\theta \times \bar r$$

Gerum ráð fyrir að P sé fast í x_i-kerfi

$$\to \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \frac{d\bar\theta}{dt}\times \bar r = \bar\omega \times \bar r$$

Ef P er með hraða $\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot}$ miðað við x_i-kerfi

$$\to \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega \times \bar r$$

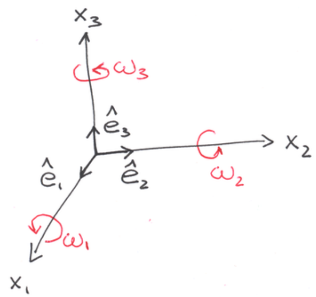
Skoðum aðeins betur

Setjum $\bar r = x_1\hat e_1 + x_2\hat e_2 + x_3\hat e_3$

og $\bar R = 0$ ← hnitakerfin eru með sama upphafspunkt

$$\to \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_i x_i\hat e_i\right\} = \sum_i\left\{\dot x_i\hat e_i + x_i\dot{\hat e}_i\right\}$$

$$\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \dot{\bar r}_{rot} + \sum_i x_i\dot{\hat e}_i$$



$$\frac{d\hat e_1}{dt} = \omega_3\hat e_2 - \omega_2\hat e_3$$

$$\frac{d\hat e_2}{dt} = -\omega_3\hat e_1 + \omega_1\hat e_3$$

$$\frac{d\hat e_3}{dt} = \omega_2\hat e_1 - \omega_1\hat e_2$$

$$\boxed{\dot{\hat e}_i = \bar\omega \times \hat e_i}$$

$$\to \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \dot{\bar r}_{rot} + \sum_i \bar\omega \times x_i\hat e_i = \dot{\bar r}_{rot} + \bar\omega\times\bar r$$

4

Almennt gildir fyrir vigur $\bar{Q}$

$$\boxed{\left(\frac{d\bar Q}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar Q}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times\bar Q}$$

T.d. fyrir hornhröðun

$$\left(\frac{d\bar\omega}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar\omega}{dt}\right)_{rot} + \overbrace{\bar\omega\times\bar\omega}^{=0} = \dot{\bar\omega}$$

hornhröðunin er sú sama í báðum kerfum

Byrjum aftur með

$$\bar r' = \bar R + \bar r$$

$$\left(\frac{d\bar r'}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar R}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed}$$

en

$$\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times\bar r$$

$$\left(\frac{d\bar r'}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar R}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times\bar r$$

$$\bar v_f \equiv \dot{\bar r}_f \equiv \left(\frac{d\bar r'}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\bar V \equiv \dot{\bar R}_f \equiv \left(\frac{d\bar R}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\bar v_r \equiv \dot{\bar r}_{rot} \equiv \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot}$$

$$\rightarrow \boxed{\bar v_f = \bar V + \bar v_r + \bar\omega\times\bar r}$$

5

$$\left(\frac{d\bar r'}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar R}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times\bar r$$

$$\boxed{\bar v_f = \bar V + \bar v_r + \bar\omega\times\bar r}$$

$\bar v_f$: Hraði m.v. fasta kerfið

$\bar V$: Hraði miðju snúningskerfis m.v. fasta kerfið

$\bar v_r$: Hraði m.v. snúningskerfi

$\bar\omega$: Snúningur snúningskerfis

$\bar\omega\times\bar r$: Hraði vegna snúnings snúningskerfis

6

Gervikraftar

Aðeins í tregðukerfi gildir

$$\bar F = m\bar a$$

Því er hægt að finna

$$\bar F = m\bar a_f = m\left(\frac{d\bar v_f}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\left(\frac{d\bar v_f}{dt}\right)_{fixed} = \underbrace{\left(\frac{d\bar V}{dt}\right)_{fixed}}_{=\ddot{\bar R}_f} + \left(\frac{d\bar v_r}{dt}\right)_{fixed} + \dot{\bar\omega}\times\bar r + \bar\omega\times\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\left(\frac{d\bar v_r}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar v_r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times\bar v_r$$

$$= \bar a_r + \bar\omega\times\bar v_r$$

hröðun í snúningskerfinu

$$\bar\omega\times\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{fixed} = \bar\omega\times\left(\frac{d\bar r}{dt}\right)_{rot} + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r)$$

$$= \bar\omega\times\bar v_r + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r)$$

7

samantekið

$$\bar F = m\bar a_f = m\ddot{\bar R}_f + m\bar a_r + m\bar\omega\times\bar v_r + m\dot{\bar\omega}\times\bar r + m\bar\omega\times\bar v_r + m\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r)$$

$$= m\ddot{\bar R}_f + m\bar a_r + m\dot{\bar\omega}\times\bar r + m\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r) + 2m\bar\omega\times\bar v_r$$

Fyrir athuganda í snúningskerfinu

$$\boxed{\bar F_{eff} \equiv m\bar a_r = \bar F - m\ddot{\bar R}_f - m\dot{\bar\omega}\times\bar r - m\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r) - 2m\bar\omega\times\bar v_r}$$

Hliðrunarhröðun

Hornhröðun

Snúningskerfis m.v. fasta kerfið

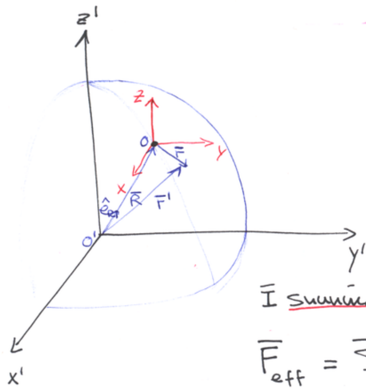
miðflóttakraftur

Coriolis kraftur (1835)

Gervikraftar

Hreyfing m.v. jörð

8



Mælt í föstu kerfinu

$$\bar F = \bar S + m\bar g_0$$

$\bar S$: ytri kraftar, rafsegul, viðnám, ...

$$\bar g_0 = -G\frac{M_E}{R^2}\hat e_R$$

Í snúningskerfinu

$$\bar F_{eff} = \bar S + m\bar g_0 - m\ddot{\bar R}_f - \underbrace{m\dot{\bar\omega}\times\bar r}_{\sim 0} - m\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar r) - 2m\bar\omega\times\bar v_r$$

en

$$\left(\frac{d\bar Q}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\bar Q}{dt}\right)_r + \bar\omega\times\bar Q$$

$$\hookrightarrow \ddot{\bar R}_f = 0 + \bar\omega\times\dot{\bar R}_f = 0 + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar R)$$

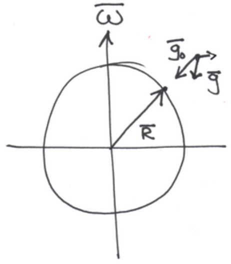
9

$$\rightarrow \bar F_{eff} = \bar S + m\bar g_0 - m\bar\omega\times(\bar\omega\times(\bar r+\bar R)) - 2m\bar\omega\times\bar v_r$$

Því er heppilegt að skilgreina

$$\bar g = \bar g_0 - \bar\omega\times\{\bar\omega\times(\bar r+\bar R)\}$$

miðflóttakrafturinn hefur áhrif á þyngdarhröðunina
breytir lögun jarðar



$-\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar R)$ ←

- Sterkastur við miðbaug
- Hverfur á skautum
- Hafið er lárétt m.v. $\bar g$, ekki $\bar g_0$
- Mælanlegt með pendúli

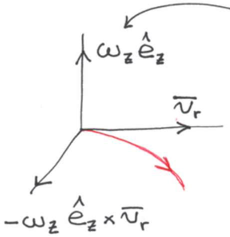
$\omega^2 R \sim 0{,}034$ m/s²

Kraftur Coriolis á jörð

10

$$-2m\bar\omega\times\bar v_r$$

Í snertisléttu á jörð, norðurhvel



Sterkastur við norðurskaut minnkar í átt að miðbaugi þar sem hann hverfur

↑

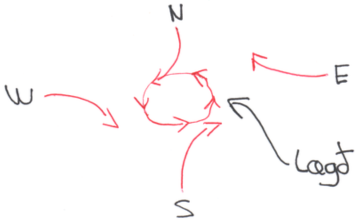
Snýst við á suðurhveli

Í snertisléttu á Norðurhveli → hægri beygja

Í snertisléttu á Suðurhveli → vinstri beygja

N-hvel

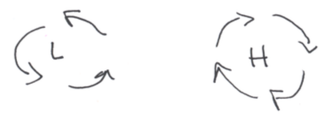
Loft flæðir frá háþrýstingi að lágum



11

N-hvel

Séð ofan frá á snertisléttu



Öfugt á suðurhveli

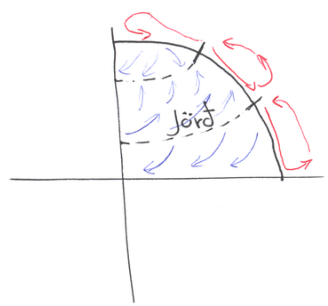
Engar sterkar lægðir á miðbaug

Staðvindar

Eru flóknari vegna hitunar frá yfirborði

Rétt norðan Íslands
NV-vindur

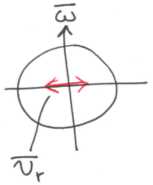
Rétt sunnan Ísland
suðvestan-vindur



Speglað fyrir S-hvel

En hreyfing við yfirborð er ekki alveg í snertisléttu

T.d. á miðbaug er $\omega_z = 0$, en $\underbrace{\bar{\omega} \times \bar{v}_r}_{} \neq 0$



$\bar{v}_r \rightarrow \nearrow$ upp

$\swarrow \leftarrow \bar{v}_r$ niður

Í snertiflatarkerfi

Eldflaugar fyrir sporbraut eru sendar austur

Eötvös-hrif

Fallhreyfing með krafti Coriolis – Dæmi

Við yfirborð jarðar (kerfi sem snýst) höfðum við leitt út

$$\bar{F}_{eff} = \bar{S} + m\bar{g} - 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

allir ytri kraftar

r: rotating – hringsnúið kerfi

Coriolis

$$\bar{g} = \bar{g}_0 - \bar{\omega} \times \{\bar{\omega} \times (\bar{r} + \bar{R})\}$$

miðflóttarkraftur vegna hringsnúnings

kraftar sem virðist verka í kerfi sem er ekki tregðukerfi

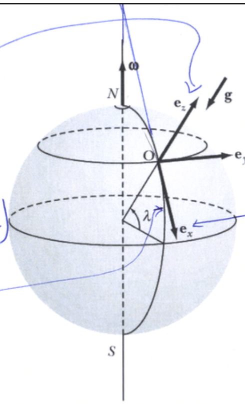
Setjum $\bar{S} = 0$, og til að stöðva hreyfingu $\bar{F}_{eff} = m\bar{a}_r$

$$\rightarrow \boxed{\bar{a}_r = \bar{g} - 2\bar{\omega} \times \bar{v}}$$

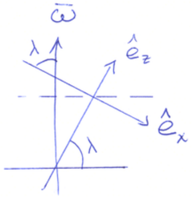
Veljum hnitakerfi þ.a.

$$\hat{e}_z \parallel (-\bar{g})$$

Gerum ráð fyrir að g sé fasti í fallinu. (g inniheldur miðflóttakraft)



N-hvel $\rightarrow \begin{cases} \omega_x = -\omega\cos\lambda \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega\sin\lambda \end{cases}$



$$\begin{aligned} \bar{\omega}\cdot\hat{e}_x &= -\omega\cos\lambda \\ \bar{\omega}\cdot\hat{e}_z &= \omega\cos(\tfrac{\pi}{2}-\lambda) \\ &= \omega\sin\lambda \\ \bar{\omega}\cdot\hat{e}_y &= 0 \end{aligned}$$

Mestur hraðinn er í $\hat{e}_z$-stefnu

Coriolis → hraðar í $\hat{e}_x$ og $\hat{e}_y$ stefnur mögulegir, en

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &\simeq 0 \\ \dot{y} &\simeq 0 \\ \dot{z} &\simeq -gt \end{aligned}}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_r \simeq \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} = -\hat{e}_y\,\omega gt\cos\lambda$$

$$\bar{g} = (0, 0, -g) \qquad \bar{a}_r = \bar{g} - 2\bar{\omega}\times\bar{v}$$
$$= (0,\ 2\omega gt\cos\lambda,\ -g)$$

→ kraftur Coriolis leiðir til hröðunar í $\hat{e}_y$-stefnu, í austur

Hreyfijafnan fyrir $\hat{e}_y$-stefnu er

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{y} &= 2\omega gt\cos\lambda \\ \ddot{z} &= -g \end{aligned}}$$

og í $\hat{e}_z$-stefnu

$\begin{cases} z(0) = h \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ fellur í $z = 0$ á tíma $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

upphaf $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow y(t) = \frac{\omega g t^3}{3}\cos\lambda$

4

$y(t) = \frac{\omega g t^3}{3}\cos\lambda$ og $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$\to y(t_h) = \frac{\omega g}{3}\cos\lambda \cdot \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{\omega}{3}\cos\lambda \cdot \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

$$[y(t_h)] = \frac{L^{3/2}}{T}\frac{T}{L^{1/2}} = L, \quad \omega = 7.3\cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}, \quad h = 100\ \text{m}$$

$d = y(t_h) - 0 \simeq 1{,}55$ cm fyrir $\lambda = 45^\circ$ (bók)

$\simeq 0{,}96$ cm fyrir $\lambda = 64^\circ$

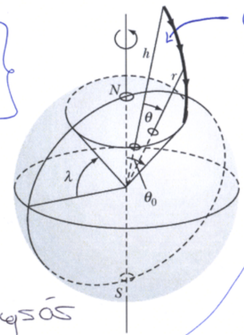
Á Norðurstautinu verður ekkert frávik frá lóðlínu, og þar væri líka miðflóttakraftinum 0 $\bar{g} = \bar{g}_0$

Getum við samræmt að lýsingin hér að framan í „ekki-tregðukerfi" gefi sömu niðurstöður og hreyfing í miðlægu mætti í tregðukerfi?

5

Massa sleppt í hæð h yfir yfirborði

{Búast má við hreyfingu eftir fleygboga með miðju jarðar í brennipunkti $\epsilon \simeq 1$}



θ er mælt frá upphafsstaðsetningu massa

Þegar ögn er sleppt fer hún láréttan hraða til hægri

$$v_{hor} = r\omega\cos\lambda = (R+h)\omega\cos\lambda$$

þá er hverfiþunginn um snúningsás

$$l = m r v_{hor} = m(R+h)^2\omega\cos\lambda$$

Jafna brautarinnar er

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \epsilon\cos\theta$$

$$\alpha = \frac{l^2}{mk}$$

þegar $t = 0$, $\theta = 0$

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \epsilon$$

$$\frac{\alpha}{R+h} = 1 - \epsilon$$

6

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \epsilon\cos\theta$$

$$\frac{\alpha}{R+h} = 1 - \epsilon \quad \to \alpha = (1-\epsilon)(R+h)$$

$$\to r = \frac{(1-\epsilon)(R+h)}{1-\epsilon\cos\theta}$$

Áður fékkst

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{fasti}$$

$$\to \frac{m}{l} r^2 d\theta = dt \quad \text{og} \quad l = m(R+h)^2\omega\cos\lambda$$

$$\to t - 0 = \frac{m}{l}\int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^\theta \left\{\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta}\right\}^2 d\theta$$

7

Tökum með $\theta = \theta_0$ hornið þegar massinn fellur á yfirborð jarðar $(r = R)$

$$r = \frac{(1-\epsilon)(R+h)}{1-\epsilon\cos\theta} \to \frac{r}{R+h} = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta}$$

og

$$\frac{R}{R+h} = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta_0}$$

$$\to 1 + \frac{h}{R} = \frac{1-\epsilon\cos\theta_0}{1-\epsilon} = \frac{1-\epsilon\left\{1-2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right\}}{1-\epsilon}$$

$$= 1 + \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \to \frac{h}{R} = \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Brautin er næstum lóðrétt, θ breytist mjög lítið, $\theta \sim 0$

$$\rightarrow \frac{h}{R} = \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \simeq \frac{\epsilon\theta_0^2}{2(1-\epsilon)}$$

$$t = \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^\theta d\theta \left\{\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon\cos\theta}\right\}^2 = \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left\{1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}^2}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1-\epsilon\cos\theta}{1-\epsilon}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1-\epsilon\left(1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1-\epsilon}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2$$

θ lítið

$$\rightarrow t \approx \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left\{1+\frac{\epsilon\theta^2}{2(1-\epsilon)}\right\}^2}$$

$$\frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} = \frac{h}{R\theta_0^2}$$

$t(\theta=\theta_0) = T$ falltíminn

$$\rightarrow T = \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\left\{1+\left(\frac{h\theta^2}{R\theta_0^2}\right)\right\}^2} \simeq \frac{1}{\omega\cos\lambda}\int_0^{\theta_0} d\theta\left\{1-\frac{2h\theta^2}{R\theta_0^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\omega\cos\lambda}\left\{1-\frac{2}{3}\frac{h}{R}\right\}\theta_0$$

$$\rightarrow \theta_0 = \frac{\omega T\cos\lambda}{1-\frac{2h}{3R}} \simeq \omega T\cos\lambda\cdot\left\{1+\frac{2h}{3R}\right\}$$

Í fallinu snýst jörðin um ωT → punkturinn undir massanum klukkan $t=0$ færist í austur um $(TR\omega\cos\lambda)$.
Á sama tíma liggur braut massans í austur um $R\theta_0$
því er hliðrunin í austur

$$d = R\theta_0 - R\omega T\cos\lambda$$
$$\simeq \frac{2}{3}h\omega T\cos\lambda$$

Áður sáum við að $T \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ← nálgun hér....

$$\rightarrow d \simeq \frac{2}{3}h\omega T\cos\lambda \simeq \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

eins og áður

Pendúll Foucault

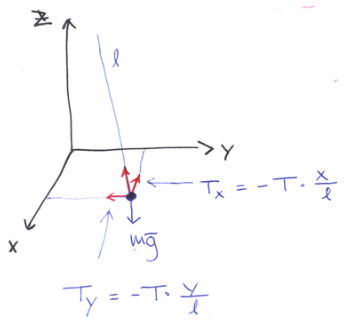
Sveifluslétta penduls sem er rétt hengdur upp snýst vegna snúnings jarðar

Frekar flókið fyrirbæri → skoðum smáar sveiflur

setjum $\hat{e}_z$ samsíða ~~stöðbandinu~~ Lóðlínu

$\rightarrow \dot{z} \ll \dot{x}, \dot{y} \rightarrow \dot{z} \sim 0$ $\qquad x, y \ll \ell$

$$\bar{a}_r = \bar{g} + \frac{\bar{T}}{m} - 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r$$



$T_z \simeq T$

$T_x = -T\frac{x}{\ell}$ $\sim \sin\theta_x$

$T_y = -T\frac{y}{\ell}$ $\sim \sin\theta_y$

$g_x = 0$

$g_y = 0$

$g_z = -g$

$\omega_x = -\omega\cos\lambda$

$\omega_y = 0$

$\omega_z = \omega\sin\lambda$

$(\bar{v}_r)_x = \dot{x}$

$(\bar{v}_r)_y = \dot{y}$

$(\bar{v}_r)_z = \dot{z} \simeq 0$

(12)

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_r \simeq \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\dot{y}\omega\sin\lambda,\ \dot{x}\omega\sin\lambda,\ -\dot{y}\omega\cos\lambda\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} (a_r)_x &= \ddot{x} \simeq -\frac{T}{m}\frac{x}{\ell} + 2\dot{y}\omega\sin\lambda \\ (a_r)_y &= \ddot{y} \simeq -\frac{T}{m}\frac{y}{\ell} - 2\dot{x}\omega\sin\lambda \end{aligned}}$$

Smáar sveiflur $T \simeq mg$, setjum $\alpha^2 = \frac{T}{m\ell} \simeq \frac{g}{\ell}$
og $\omega_z = \omega\sin\lambda$

þá fæst

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha^2 x &= 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \alpha^2 y &= -2\omega_z \dot{x} \end{aligned}} \leftarrow$$

Tengdar 2. stigs jöfnur

(13)

Þessar jöfnur má „aftengja" með (leggja saman ....)

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \alpha^2(x + iy) = -2\omega_z(i\dot{x} - \dot{y}) = -2i\omega_z(\dot{x} + i\dot{y})$$

og skilgreina $q \equiv x + iy$

Því hneppið verður þá

$$\boxed{\ddot{q} + 2i\omega_z\dot{q} + \alpha^2 q = 0}$$

Svipuð deyfðu sveiflunum

Lausnin er

$$q(t) = e^{-i\omega_z t}\left\{A e^{\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2}\,t} + B e^{-\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2}\,t}\right\}$$

Ef jörðin væri kyrr fengist

$$\ddot{q}' + \alpha^2 q' = 0 \qquad \text{því } \omega_z = 0$$

(14)

Sveiflan er miklu hraðari en snúningurinn $\alpha >> \omega_z$

$$\rightarrow q(t) \simeq e^{-i\omega_z t}\left\{A e^{i\alpha t} + B e^{-i\alpha t}\right\}$$

Lausn óhliðruðu jöfnunnar er

$$q'(t) = x'(t) + iy'(t) = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}$$

$$\rightarrow q(t) = q'(t)\cdot e^{-i\omega_z t}$$

$$\rightarrow x(t) + iy(t) = \left\{x'(t) + iy'(t)\right\}\cdot e^{-i\omega_z t}$$

$$= (x' + iy')\left\{\cos(\omega_z t) - i\sin(\omega_z t)\right\}$$

$$= \left\{x'\cos(\omega_z t) + y'\sin(\omega_z t)\right\} + i\left\{-x'\sin(\omega_z t) + y'\cos(\omega_z t)\right\}$$

(15)

Séð sem hneppi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & \sin(\omega_z t) \\ -\sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) \end{pmatrix}}_{\text{Snúningur í sléttu}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

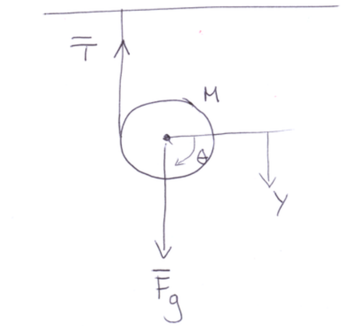
slétta pendúlsins snýst með $\boxed{\omega_z = \omega\sin\lambda}$

Snýst mest á skautunum og alls ekki á miðbaug

Aflfræði Stjarfhluta

Lærum nýja aðferða fræði hér, en til upprifjunar skoðum við fyrst tvö dæmi

① Fallandi trissa



CM - hreyfing

$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{y} &= F_g - T \\ &= Mg - T \end{aligned}}$$

Hringsnúningurinn er vegna T

$$\boxed{\tau = RT = I\ddot{\theta}}, \quad I = \tfrac{1}{2}MR^2$$

$$T = \frac{I\ddot{\theta}}{R} = \tfrac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$

upphafsskilyrði

$$y(0) = 0$$
$$\theta(0) = 0$$

$$y = R\theta \rightarrow \dot{y} = V = R\dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = g - \frac{T}{M} = g - \frac{I\ddot{\theta}}{MR} = g - \tfrac{1}{2}R\ddot{\theta} = g - \frac{\ddot{y}}{2}$$

$$\rightarrow \ddot{y} = g - \frac{\ddot{y}}{2} \quad \text{eða} \quad \ddot{y} = \frac{2}{3}g$$

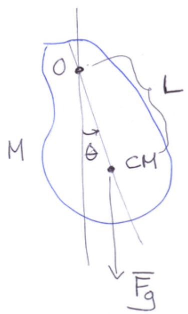
$$\alpha = \ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} = \frac{2g}{3R}$$

T má síðan finna

$$T = \frac{I}{R}\ddot{\theta} = \frac{Mg}{3}$$

$$\hookrightarrow \quad V = \dot{y} = \frac{2gt}{3}$$
$$\omega = \frac{2gt}{3R}$$

② Raunpendúll



$$I = MR^2$$

tregðuarmur

Smáarsveiflur

$$T = \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$U = -MgL\cos\theta \simeq -MgL\left\{1 - \frac{\theta^2}{2}\right\}$$

$$L = T - U = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + MgL\left\{1 - \frac{\theta^2}{2}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I}\theta = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{MgL}{I} = \frac{gL}{k^2}$$

Tregðuþinur (Inertiatensor)

Byrjum með stjarfhlut settan saman úr n ögnum með massa m_α, $\alpha = 1, 2, \ldots n$

Notum fast hnitakerfi óháð hlut (fixed), og annað fast í hlutnum (r)

$$v_{f\alpha} = \bar{V} + \bar{v}_{r\alpha} + \bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha$$

agnirnar eru fastar í hnitakerfi hlutar

$$\rightarrow \bar{v}_{r\alpha} = \left(\frac{d\bar{r}_\alpha}{dt}\right)_{rot} \equiv 0$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{v}_\alpha = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha}$$

hraði í fasta kerfinu (fixed

fyrir hverja ögn

$$T_\alpha = \tfrac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2$$

Í heild fyrir stjarfhlutinn

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left\{\bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left\{V^2 + (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha)^2 + 2\bar{V}\cdot(\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha)\right\}$$

en

$$\sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha = M\bar{R} = 0$$

í hnitakerfi stjarfhlutar með miðju í CM

$$\sum_\alpha m_\alpha \bar{V}\cdot(\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) = \bar{V}\cdot\Big(\bar{\omega} \times \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha}_{=0}\Big)$$

$$\sum_\alpha m_\alpha V^2 = V^2 \sum_\alpha m_\alpha = MV^2$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha)^2 = T_{trans} + T_{rot}}$$

Athugum

$$(\bar{A} \times \bar{B})^2 = (\bar{A} \times \bar{B})\cdot(\bar{A} \times \bar{B}) = \left\{A^2B^2\sin^2\theta = A^2B^2(1 - \cos^2\theta)\right\}$$
$$= A^2B^2 - (\bar{A}\cdot\bar{B})^2$$

$$\rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left\{\omega^2 r_\alpha^2 - (\bar{\omega}\cdot\bar{r}_\alpha)^2\right\}$$

(5)

umritum

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left\{\omega^2 r_\alpha^2 - (\vec\omega\cdot\vec r_\alpha)^2\right\} = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left\{\left(\sum_i \omega_i^2\right)\left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i}\right)\left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j}\right)\right\}$$

notum

$$\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{i,j}$$

$$\rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \sum_{i,j} m_\alpha \left\{\omega_i\omega_j\delta_{ij}\left(\sum_k x_{\alpha,k}^2\right) - \omega_i\omega_j x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j \sum_\alpha m_\alpha\left\{\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right\}$$

Ef

$$\boxed{I_{ij} \equiv \sum_\alpha m_\alpha\left\{\delta_{i,j}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right\}} \rightarrow \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j}$$

(6)

$\mathbb{I}$ með stök I_{ij} lítur út fyrir að vera fylki (3×3)
Við munum síðar komast að því að $\mathbb{I}$ er þinur (tensor)
{vegna þess hvernig hann ummyndast milli hnitakerfa}

$\mathbb{I}$ er tregðuþinur (inertia tensor) (í bókinni er $\mathbb{I} = \{I\}$)

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha\left\{\delta_{ij}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}\right\}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha(x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1}x_{\alpha,2} & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,1}x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2}x_{\alpha,1} & \sum_\alpha m_\alpha(x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,2}x_{\alpha,3} \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3}x_{\alpha,1} & -\sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,3}x_{\alpha,2} & \sum_\alpha m_\alpha(x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{pmatrix}$$

(7)

þetta má umrita með $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$

$$r_\alpha^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha(r_\alpha^2 - x_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha x_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(r_\alpha^2 - y_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha x_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha(r_\alpha^2 - z_\alpha^2) \end{pmatrix}$$

I_{11}, I_{22} og I_{33} eru tregðuvægin um x-, y-, eða z-ás
(Moments of inertia)

I_{ij} með $i \neq j$ eru tregðumargfeldin (products of inertia)

(8)

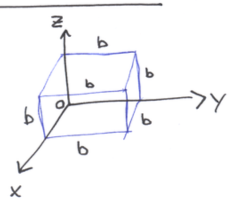
þinurinn er samhverfur með $I_{ij} = I_{ji}$

→ $\mathbb{I}$ er með 6 óháð stök, hann er samleggjanlegur fyrir massapunktana

því fæst fyrir massadreifingu $\rho(F)$

$$\boxed{I_{ij} = \int_V dv\, \rho(F)\left\{\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right\}}$$

Sýnidæmi



Teningur með fasta dreifingu ρ, $M = \rho b^3$
notum hnitakerfið á myndinni, hér er
O ekki í CM

(9)

$$I_{11} = \rho \int_0^b dz \int_0^b dy\,(y^2+z^2) \int_0^b dx = \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2$$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b dx\, x \int_0^b dy\, y \int_0^b dz = -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2$$

Skilgreinum $\beta \equiv M b^2$ þá fæst

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}\beta$$

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4}\beta$$

og $\mathbb{I} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{Bmatrix}$

(10)

Hverfiþungi

$$L = \sum_\alpha \bar{r}_\alpha \times \bar{p}_\alpha$$

miðað við O í hnitakerfi hlutar
venjulega er O valinn sem punktur
sem er kyrr í ytra fastakerfinu
eða CM hlutar

$$\bar{p}_\alpha = m_\alpha \bar{v}_\alpha = m_\alpha(\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha)$$

$$\rightarrow L = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \bar{r}_\alpha \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha) \right\}$$

notum $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{A}) = A^2\bar{B} - \bar{A}(\bar{A}\cdot\bar{B})$

$$\rightarrow \boxed{L = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ r_\alpha^2 \bar{\omega} - \bar{r}_\alpha(\bar{r}_\alpha \cdot \bar{\omega}) \right\}}$$

með sömu aðferð og áður fæst

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}\Big(\sum_j x_{\alpha,j}\omega_j\Big) \right\}$$

(11)

$$\boxed{L_i = \sum_\alpha m_\alpha \sum_j \left\{ \omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right\}}$$

$$= \sum_j \omega_j \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right\} = \boxed{\sum_j I_{ij}\omega_j}$$

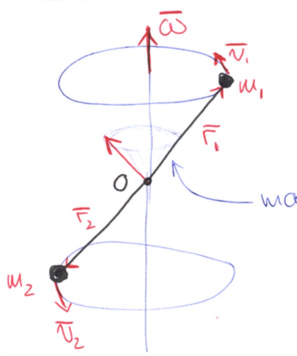
því fæst $\boxed{\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega}}$

því er opnað fyrir þann möguleika að $\bar{\omega}$ og $\bar{L}$ séu ekki alltaf samsíða

→ lítur út eins og margfeldi fylkis og dálkvigurs $\begin{array}{ccc} I & \omega & L \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{array}$

(12)

Skoðum dæmi



massalaus stöng

$$\bar{v}_\alpha = \bar{\omega} \times \bar{r}_\alpha$$

$$\bar{L} = \sum_\alpha m_\alpha(\bar{r}_\alpha \times \bar{v}_\alpha)$$

$\bar{L}$ er hornrétt á stöngina
ekki fasti (stefnan),
snýst um snúningsás
og sker keiluflöt

Enda þarf vægi til að viðhalda föstum snúningi

$$\dot{\bar{L}} = \bar{N}$$

Einnig

$$\frac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j = T_{rot}$$

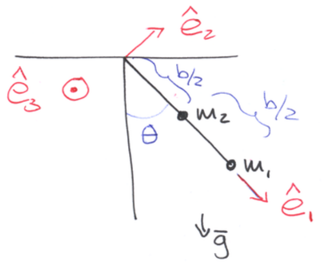
(13)

$$\to T_{rot} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{L}$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\mathbb{I}\cdot\bar{\omega}$$

Annað dæmi

Massalaus stöng með tvo massa



$$\bar{\omega} = \omega_3\hat{e}_3 = \dot{\theta}\hat{e}_3$$

Allur massinn liggur í $\hat{e}_1$-stefnu

$x_{2,1} = \frac{b}{2}$ og $x_{11} = b$

Öll önnur hnit $x_{\alpha,k}$ hverfa

$$I_{ij} = m_1\left\{\delta_{ij}x_{1,1}^2 - x_{1,i}x_{1,j}\right\} + m_2\left\{\delta_{ij}x_{2,1}^2 - x_{2,i}x_{2,j}\right\}$$

(14)

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \to \begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ L_3 = I_{33}\omega_3 = \left\{m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4}\right\}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{\bar{L}} = \bar{N}$$

$$\to \left\{m_1b^2 + m_2\frac{b^2}{4}\right\}\ddot{\theta}\,\hat{e}_3 = \sum_\alpha \bar{r}_\alpha\times\bar{F}_\alpha$$

$$\bar{g} = g\cos\theta\cdot\hat{e}_1 - g\sin\theta\cdot\hat{e}_2$$

$$\bar{r}_1\times\bar{F}_1 = b\hat{e}_1\times(\cos\theta\hat{e}_1 - \sin\theta\hat{e}_2)m_1g = -m_1gb\sin\theta\cdot\hat{e}_3$$

$$\bar{r}_2\times\bar{F}_2 = \frac{b}{2}\hat{e}_1\times(\cos\theta\hat{e}_1 - \sin\theta\hat{e}_2)m_2g = -m_2g\frac{b}{2}\sin\theta\cdot\hat{e}_3$$

(15)

Því verður hreyfijafnan

$$b^2\left\{m_1 + \frac{m_2}{4}\right\}\ddot{\theta} = -bg\sin\theta\cdot\left\{m_1 + \frac{m_2}{2}\right\}$$

$$\to \omega_0^2 = \frac{\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right)}\frac{g}{b}$$

Auðvitað hefði verið skynsamlegt hér að nota T og U → L og Euler-Lagrange

Ef $m_1 \gg m_2 \to \omega_0^2 = \frac{m_1}{m_1}\frac{\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right)}{\left(1 + \frac{m_2}{4m_1}\right)}\frac{g}{b}$

$\approx \frac{g}{b}$ eins og búast mátti við

(1)

Höfuðásar hverfitregðu (principal axes of inertia)

Við höfum leitt út

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

eða

$$\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega}$$

Ef $\mathbb{I}$ væri á hornalínuham

$$I_{ij} = I_i\delta_{ij}$$

með

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

þá væri

$$L_i = \sum_j I_i\delta_{ij}\omega_j = I_i\omega_i$$

og

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_i\delta_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\sum_i I_i\omega_i^2$$

Verkefnið er því að finna ása þ.a. stök $\mathbb{I}$ utan hornalínu hverfi

→ ásarnir kallast höfuðásar hverfitregðu

2

Munum að $\mathbb{I}$ er samhverft
þ.a. $I_{ij} = I_{ji}$

Ef hlutur snýst um höfuðás
þá eru $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ samsíða

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

þ.s. I er hverfitregðan um
ásinn. En, þetta má skrifa
sem

$$\vec{L} = \boxed{\mathbb{I}\cdot\vec{\omega} = I\vec{\omega}}$$

→ eigingildisverkefni

Eigingildin eru hverfitregður
höfuðásanna

Höfuðásarnir eru í réttu hlutfalli
við eiginvigrana

Höfuðásarnir eru hornréttir

Ef við útbúum fylki með stöðluðu
eiginvigrunum í dálkum

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} | & | & | \\ | & | & | \end{array} \right) \end{array}$$

þá fæst einöku ummyndun

$$\mathbb{I}_d = \begin{Bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{Bmatrix} = U^{+}\mathbb{I}\,U$$

tengjum betur við hnitaskipti síðar

3

Ef hlutur er með einn
snúningssamhverfuás

og hverfitregðu I_1
um hann
þá eru $I_2 = I_3$

Tvöfalt eigingildi
og nákvæm staðsetning
hinna tveggja ásanna skiptir
ekki máli, en þeir eru
hornréttir á samhverfuásinn

↑ önnur rót kennijöfnunnar fyrir
eigingildin er tvöföld

Kúlusnúður: $I_1 = I_2 = I_3$

Samhverfur snúður: $I_1 = I_2 \neq I_3$

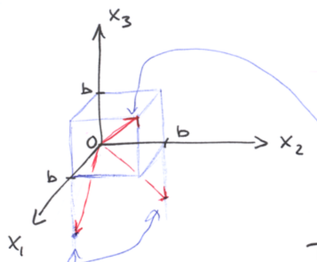
Ósamhverfur snúður: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

$I_1 = 0$, $I_2 = I_3$ rotor

þyrill ?

4

Dæmi



Finnið hverfitregðu um höfuðása
og höfuðásana

Við vorum búin að finna að miðað við O

$$\mathbb{I} = Mb^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Notum wxmaxima og finnum
eigingildi — eiginvigrar

$$I_1 = Mb^2\cdot\frac{1}{6} \longleftarrow (1,1,1)$$

$$I_2 = I_3 = Mb^2\frac{11}{12} \longleftarrow (1,0,-1) \text{ og } (0,1,-1)$$

5

fyrst einn ás er með $I_1 = Mb^2\cdot\frac{1}{6}$
og hinir $I_2 = I_3 = Mb^2\cdot\frac{11}{12}$ þá
er I_1 hverfitregða um samhverfuás
sem er $(1,1,1)$

Hinir höfuðásarnir þurfa ekki að vera nákvæmlega
$(1,0,-1)$ eða $(0,1,-1)$, en þeir eru almennt hornrétt
samantekt þessara vigra

og þar með líka hornréttir á $(1,1,1)$

(6)

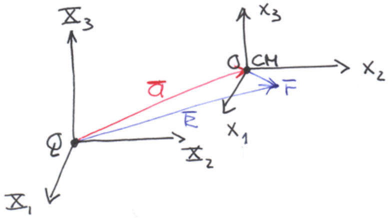
Hverfitregða fyrir mismunandi hnitakerfi í hlutnum

$\bar{R} = \bar{a} + \bar{r}$

$X_i = a_i + x_i$

Til að skilja að T_{rot} og T_{trans} setjum við miðju hnitakerfis hlutar í CM

Athugum tvö hnitakerfi með samsíða ása, en annað er hliðrað úr CM



Miðað við X-kerfið er

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha i} X_{\alpha j} \right\}$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right\}$$

(7)

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right\} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \left(2 x_{\alpha,k} a_k + a_k^2 \right) - \left(a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j \right) \right\}$$

$$= I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right\} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ 2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha j} - a_j x_{\alpha i} \right\}$$

munum að

$\sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha = 0 \leftarrow$ CM í O $\rightarrow \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k} = 0$

$$\sum_\alpha m_\alpha 2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k = 2\delta_{ij} \sum_k a_k \left\{ \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k} \right\} = 0$$

$$\rightarrow J_{ij} = I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right\}$$

(8)

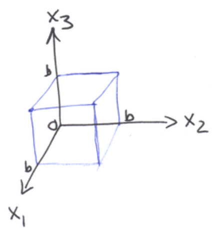
En $\sum_\alpha m_\alpha = M$ og $\sum_k a_k^2 = a^2$

$$\rightarrow \boxed{I_{ij} = J_{ij} - M\left\{ a^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right\}}$$

Setning Jacob Steiner um samsíða ása

Skoðum teninginn aftur

Við fundum J_{ij} um O sem var ekki CM



$$\mathbb{J} = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

CM er $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \frac{b}{2}$

$\rightarrow I_{ii} = \frac{1}{6} Mb^2$

$I_{ij} = 0$ ef $i \neq j$

(9)

því fæst

$$\mathbb{I} = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{Mb^2}{6} \mathbb{1} = \frac{Mb^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eiginvigrarnir eru (1,0,0), (0,1,0) og (0,0,1) sem liggja þvert á hliðar teningsins

↑ ekki er hægt að gera upp á milli hliða tening samhverfa

Í raun ef CM er valið geta höfuðásarnir miðað við CM haft hvaða stefnu sem er svo lengi sem þeir eru hornréttir

↑

ennþá samskonar

og $\mathbb{I}$ heldur áfram að vera á hornalínuham.

Athugum frekar hverfitregðuþininn

Höfum leitt út

$$L_k = \sum_l I_{kl}\,\omega_l$$

þetta er vigurjafna, því verður að gilda í hnitakerfi sem er snúið m.v. það fyrra

$$L'_i = \sum_j I'_{ij}\,\omega'_j$$

L og ω eru vigrar og því gildir

$$x_i = \sum_j \lambda^t_{ij}\, x'_j = \sum_j \lambda_{ji}\, x'_j$$

Almennt fyrir vigra

$\rightarrow$

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk}\, L'_m$$

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl}\,\omega'_j$$

$\bar{\lambda}$ er snúningsfylkið með

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

eða

$$\boxed{\lambda\lambda^t = \mathbb{1} \qquad \lambda^t = \lambda^{-1}}$$

hornrétt fylki $\leftarrow$ útvíkkun á þeim eru einóta fylki

$$L_k = \sum_l I_{kl}\,\omega_l$$

$$\rightarrow \sum_m \lambda_{mk}\, L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl}\,\omega'_j$$

margföldum báðar hliðar með λ_{ik} og summum yfir k

$$\sum_m \underbrace{\left\{\sum_k \lambda_{ik}\lambda_{mk}\right\}}_{=\delta_{im}} L'_m = \sum_j \left\{\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\right\}\omega'_j$$

$$\rightarrow \quad L'_i = \sum_j \left\{\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\right\}\omega'_j$$

$$\rightarrow \quad I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}$$

Endurritum

$$\boxed{I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^t_{lj}}$$

það sem ummyndast á þennan hátt er skilgreint sem 2. stigs þinur

$$\boxed{\mathbb{I}' = \lambda\,\mathbb{I}\,\lambda^{-1}}$$

Einslögunar ummyndun (similarity transformation)

Við vorum búin að sjá að fyrir tening m.v. CM-hnit fékkst

$$\mathbb{I} = \frac{1}{6}Mb^2\,\mathbb{1}$$

þess vegna fæst fyrir hvaða snúning sem er að

$$\mathbb{I}' = \frac{1}{6}Mb^2\,\lambda\mathbb{1}\lambda^{-1} = \frac{1}{6}Mb^2\,\lambda\lambda^{-1} = \frac{1}{6}Mb^2\,\mathbb{1} = \mathbb{I}$$

fyrir samhverft fylki gildir að eigingildin eru rauntölur og eiginvigrarnir eru hornréttir

samanburður við bls 2 í þessum nótum sýnir að ummyndanir til að ná $\mathbb{I}$ á hornalínuham má hugsa sem snúninga í 3-víða rúminu.

$\uparrow$

þetta gildir fyrir öll samhverf fylki eða Hermitísk í hvaða vídd sem er

Example 11.8 í bók sýnir hvernig U fyrir teninginn má skrifa sem tvo snúninga

$$U = \lambda_2\lambda_1$$

og

$$\mathbb{I}_d = U^{+}\,\mathbb{I}\,U$$

$\uparrow$

á hornalínuham

1

Horn Eulers

Ummyndun milli tveggja hnitakerfa þar sem öðru hefur verið snúið m.v. hitt má skrifa sem

$$\bar{x} = \lambda \bar{x}'$$

hugsum $\bar{x}'$ í fastakerfinu og $\bar{x}$ í hnitakerfi hlutar

Ummyndunin λ er háð þremur hornum

Skoðum framsetningu Eulers — byggist á hornum kennd við hann. Horn Eulers ϕ, θ, ψ

(sjá mynd á næstu síðu)

① Snúningur um ϕ (andsælis) um x_3'-ás

snýr $x_i' \to x_i''$, gerist í x_1'-x_2'-sléttu

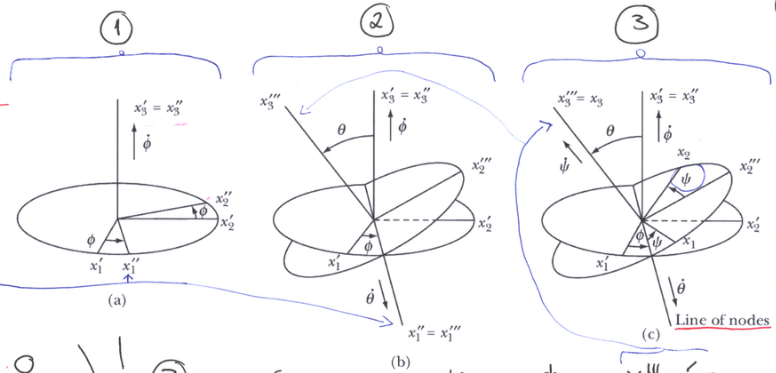
$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3'' = x_3'$$

$$\bar{x}'' = \lambda_\phi \bar{x}'$$

2

② Snúningur andsælis um θ um x_1''-ás



$x_i'' \to x_i'''$

Snúningur í x_2''-x_3''-sléttu

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}''' = \lambda_\theta \bar{x}''$$

③ Snúningur andsælis um ψ um x_3'''-ás

$x_i''' \to x_i$, snúningur í x_2'''-x_3'''-sléttu

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \lambda_\psi \bar{x}'''$$

3

$$\bar{x} = \lambda_\psi \bar{x}''' = \lambda_\psi \lambda_\theta \bar{x}'' = \underbrace{\lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi}_{=\lambda} \bar{x}'$$

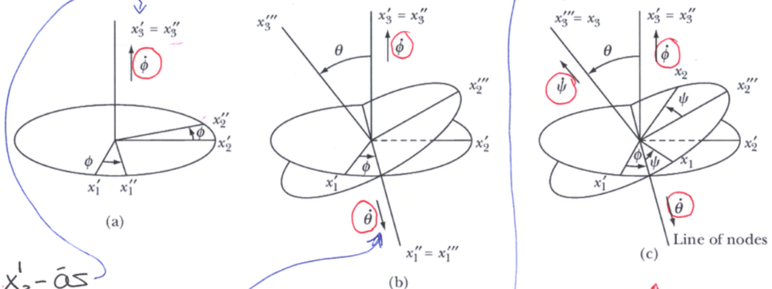
$$\lambda_{11} = \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi$$
$$\lambda_{21} = -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi$$
$$\lambda_{31} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\lambda_{12} = \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi$$
$$\lambda_{22} = -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi$$
$$\lambda_{32} = -\sin\theta\cos\phi$$
$$\lambda_{13} = \sin\psi\sin\theta$$
$$\lambda_{23} = \cos\psi\sin\theta$$
$$\lambda_{33} = \cos\theta$$

Einfaldara að hafa í huga þættina λ_ψ, λ_θ og λ_ϕ

4

Í snúningunum greinum við $\bar{\omega}$ þ.a.

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_\phi &= \dot{\phi} \\ \omega_\theta &= \dot{\theta} \\ \omega_\psi &= \dot{\psi} \end{aligned}}$$



$\dot{\phi}$: samsíða x_3'-ás

$\dot{\theta}$: samsíða hnútalínunni

$\dot{\psi}$: samsíða x_3-ás

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$$
$$\dot{\theta}_3 = 0$$

$$\dot{\psi}_1 = 0$$
$$\dot{\psi}_2 = 0$$
$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$$

byrja hér

$\boxed{\text{þættir hornhraða í hnitakerfi hlutar}}$

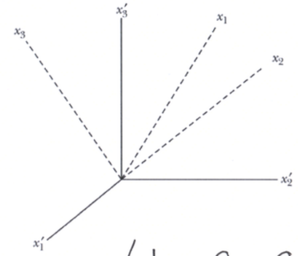
5

tökum saman

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1 &= \dot\phi_1 + \dot\theta_1 + \dot\psi_1 = \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \omega_2 &= \dot\phi_2 + \dot\theta_2 + \dot\psi_2 = \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot\phi_3 + \dot\theta_3 + \dot\psi_3 = \dot\phi \cos\theta + \dot\psi\end{aligned}}$$

Dæmi

Finnum ummyndun sem flytur x_1'-ás í x_2'-x_3'-sléttu mitt milli x_2' og x_3' og setur x_2' hornrétt á x_2'-x_3'-sléttu



$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

Aðeins snúningur um θ getur fært $x_3' \to x_3$

Til að fá x_1'-ás mitt milli x_2' og x_3'-áss þarf $45°$ snúning um θ

þessi snúningur er um x_1'-ás sem er líka x_1''-ás

$\to \lambda_\phi = 1$

fæst þá með snúningum $\psi = 90°$

6

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

Jöfnur Eulers fyrir stjarfhlut

Byrjum með enga ytri krafta, $U = 0$

$L = T$, x_i-ásarnir (kerfi hlutar) eru höfuðásar

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

þá fæst

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

Veljum horn Eulers sem alhnit. Þá fæst fyrir ψ

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) = 0$$

Umskrifum sem

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot\psi} \right) \right\} = 0$$

7

Athugum afleiðurnar

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi = \omega_2$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\dot\phi \sin\theta \sin\psi - \dot\theta \cos\psi = -\omega_1$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot\psi} = 0 \qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot\psi} = 0 \qquad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot\psi} = 1 \qquad \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i$$

því verður Euler-Lagrange jafnan

$$I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 (-\omega_1) - \frac{d}{dt}(I_3 \omega_3) = 0$$

eða

$$(I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 - I_3 \dot\omega_3 = 0$$

Þetta rakur ekki svona vel upp fyrir $\dot\omega_1$ og $\dot\omega_2$

8

En, númerun ásanna og höfuðásanna er ekki einhlít því verður að gilda

$$\boxed{\begin{aligned}(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1 \dot\omega_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_2 \dot\omega_2 &= 0 \\ (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - I_3 \dot\omega_3 &= 0\end{aligned}}$$

athugið samhverfu

Jöfnur Eulers fyrir hreyfingu án ytri krafts

Til að leiða út jöfnurnar fyrir ytri kraft er einfaldast að nota

$$\left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{fixed} = \bar N \quad \to \quad \left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{body} + \bar\omega \times \bar L = \left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\to \left(\frac{d\bar L}{dt}\right)_{body} + \bar\omega \times \bar L = \bar N$$

9

þá fæst fyrir x_3-ásinn (hlutar)

$$\dot L_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = N_3$$

og þar sem við völdum hnitakerfi eftir höfuðásum

$$L_i = I_i\omega_i \;\rightarrow\; I_3\dot\omega_3 - (I_1-I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

endurröðun ásamerkingar gefur

$$I_1\dot\omega_1 - (I_2-I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$
$$I_2\dot\omega_2 - (I_3-I_1)\omega_3\omega_1 = N_2$$
$$I_3\dot\omega_3 - (I_1-I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

Ef við notum Levi-Civita táknið í 3-víddum

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ef } (1,2,3)\,(2,3,1)\,(3,1,2) \\ -1 & \text{ef } (3,2,1)\,(1,3,2)\,(2,1,3) \\ 0 & \text{ef } i=j \text{ eða } j=k \text{ eða } k=i \end{cases}$$

rásuð umröðun

$$\boxed{(I_i-I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k (I_k\dot\omega_k - N_k)\epsilon_{ijk} = 0}$$

10

Tveir mismunandi hlutir með sömu hverfitregður um höfuðása hreyfast því eins

engir viðnámskraftar

því er oft talað um jafngildar sporvölur (ellipsoids)

skoðum aftur dæmi sem við tókum áður

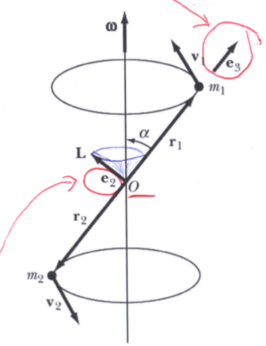
Tveir massar á massalausri stöng

Finnum $\bar L$ fyrir kerfið og $\bar N$

til að viðhalda hreyfingunni

$|\bar r_1| = |\bar r_2| = b$, x_3 er samhverfuás kerfisins

$\bar L = \sum_\alpha m_\alpha \bar r_\alpha \times \bar v_\alpha$ þvert á stöng og snýst með kerfinu $\longrightarrow$ setjum $\bar L = L\hat e_2$



11

$\omega_1 = 0$ ← verður að vera þvert á $\bar\omega$, sjá mynd

$\omega_2 = \omega\sin\alpha$

$\omega_3 = \omega\cos\alpha$

Höfuðásarnir eru x_1, x_2, x_3 og hverfitregður um þá eru

$I_1 = (m_1+m_2)b^2 \qquad L_1 = I_1\omega_1 = 0$

$I_2 = (m_1+m_2)b^2 \qquad L_2 = I_2\omega_2 = (m_1+m_2)b^2\omega\sin\alpha$

$I_3 = 0 \qquad L_3 = I_3\omega_3 = 0$

höfðum jú sett $\bar L = L\hat e_2$ svo þetta ber saman

Jöfnur Eulers eru

Ef $\dot\omega_i = 0$

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot\omega_1 - (I_2-I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2\dot\omega_2 - (I_3-I_1)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot\omega_3 - (I_1-I_2)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} -I_2\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ 0 &= N_2 \\ 0 &= N_3 \end{aligned}\right.$$

12

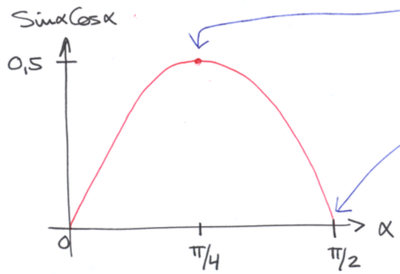
Ef snúningi er viðhaldið þá fæst $\dot\omega_i = 0$

og frá jöfnum Eulers

$$-I_2\omega_2\omega_3 = N_1$$

eða

$$N_1 = -(m_1+m_2)b^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$



max vægi fyrir $\alpha = 45°$

$N = 0$ fyrir $90°$

Hreyfing snúðs án ytri krafts, samhverfur snúður

(1)

Samhverfur $I_1 = I_2 \neq I_3$

Í fasta kerfinu er CM kyrr eða á jafnri hreyfingu

Jöfnur Eulers verða í kerfi hlutar

$$\boxed{\begin{aligned}(I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 &= 0\\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_1\dot{\omega}_2 &= 0\\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}}$$

setjum CM í 0-ið á fasta kerfinu

L er fasti í fasta kerfinu þ.s. engir kraftar verka á snúðinn

Notum höfuðása til að skilgreina hnitakerfi hlutar

Gerum ráð fyrir að $\bar{\omega}$ liggi ekki eftir höfuðás snúðs

veljum $\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$ fasti

$\to \omega_3(t) =$ fasti

þá fæst

$$\begin{cases}\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0\\ \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0\end{cases}$$

(2)

leggjum hreyfijöfnurnar saman

$$(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) - i\Omega(\omega_1 + i\omega_2) = 0$$

skilgreinum

$$\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2$$

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0$$

með lausn

$$\eta(t) = Ae^{i\Omega t}$$

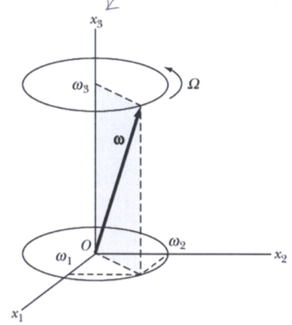
$\to \omega_1 + i\omega_2 = A\cos(\Omega t) + iA\sin(\Omega t)$

$\to \omega_1(t) = A\cos(\Omega t)$

$\omega_2(t) = A\sin(\Omega t)$

$\omega_3 =$ fasti

Hnitakerfi snúðs



$$|\omega| = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{fasti}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|\omega| &= \text{fasti}\\ \omega_3 &= \text{fasti}\end{aligned}}$$

x_3-ás ← samhverfuás

$\bar{\omega}$ veltur um samhverfuás hlutar með hornhraða Ω, $\bar{\omega}$ teiknar keiluhlutar (body cone)

(3)

Enginn ytri kraftur

$\bar{L}$: fasti í fasta kerfinu

CM er fast í 0

$T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{L} =$ fasti

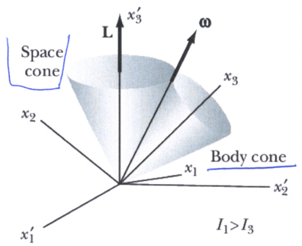
$\bar{\omega}$ veltur um $\bar{L}$ með föstu horni

samhverfuás hlutar

$\bar{L}, \bar{\omega}$, og x_3-ásinn liggja í sömu sléttu

Athugum

$$\bar{\omega} \times \hat{e}_3 = \omega_2\hat{e}_1 - \omega_1\hat{e}_2$$



$$\begin{aligned}\bar{L}\cdot(\bar{\omega}\times\hat{e}_3) &= \bar{L}\cdot(\omega_2\hat{e}_1 - \omega_1\hat{e}_2)\\ &= L_1\omega_2 - \omega_1 L_2\\ &= I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_1\omega_2\\ &= 0, \text{ því } I_1 = I_2\end{aligned}$$

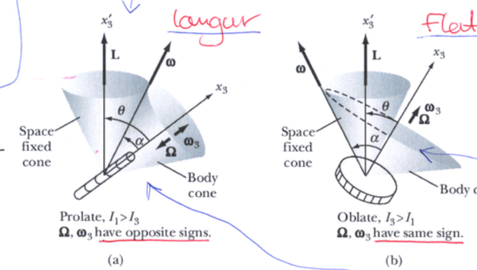
$\boxed{\bar{L} \text{ er í sléttu } \bar{\omega} \text{ og } \hat{e}_3}$

(4)

Dæmi

skoðum fyrir langan snúð $I_1 > I_3$ eða flatan $I_3 > I_1$

langur   flatur



Prolate, $I_1 > I_3$
Ω, ω_3 have opposite signs.
(a)

Oblate, $I_3 > I_1$
Ω, ω_3 have same sign.
(b)

$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$

$\bar{L} \parallel x_3'$-ás

þá er Euler hornið θ hornið milli $\bar{L}$ og x_3

Á vissum tímapunkti er $\hat{e}_2$ í sléttu $\bar{L}, \bar{\omega}$ og $\hat{e}_3$

$$\to \begin{cases}L_1 = 0\\ L_2 = L\sin\theta\\ L_3 = L\cos\theta\end{cases}$$

Ef hornið milli $\bar{\omega}$ og x_3-áss er α

$$\begin{cases}\omega_1 = 0\\ \omega_2 = \omega\sin\alpha\\ \omega_3 = \omega\cos\alpha\end{cases}$$

$$L_i = I_i\omega_i$$

$$\begin{cases}L_1 = I_1\omega_1 = 0\\ L_2 = I_1\omega_2 = I_1\omega\sin\alpha\\ L_3 = I_3\omega_3 = I_3\omega\cos\alpha\end{cases}$$

$$\frac{L_2}{L_3} = \tan\theta = \frac{I_1}{I_3}\tan\alpha$$

langur: $I_1 > I_3$

$\to \theta > \alpha$

flatur: $I_3 > I_1$

$\to \alpha > \theta$

5

$\vec{L}$ er fasti —> rúmkeilan er föst

Keila snúðs veltur innan ~~eða~~ utan á rúmkeilunni

Snertilínan er stundarsnúningsás hreyfingarinnar

↑ — í henni liggur $\vec{\omega}$ sem skilgreinir keilurnar

Dæmi Með hvaða hornhraða snúast x_3 og $\vec{\omega}$ um $\vec{L}$?

$\hat{e}_3, \vec{\omega}$ og $\vec{L}$ í sömu sléttu -> $\hat{e}_3$ og $\vec{\omega}$ hafa sama ~~hraða~~ um L

$\dot{\phi}$ er hornhraðinn um x_3' á sama vissa tíma og hér á undan

($\hat{e}_2$ í sléttu $\hat{e}_3, \vec{\omega}$ og $\vec{L}$) -> $\psi = 0$ -> $\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta$ -> $\dot{\phi} = \frac{\omega_2}{\sin\theta}$

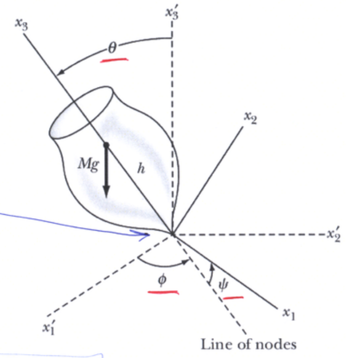
hér að undan sékkst $\omega_2 = \omega \sin\alpha$ -> $\dot{\phi} = \frac{\omega \sin\alpha}{\sin\theta}$

$$\dot{\phi} = \frac{\omega \sin\alpha}{\sin\theta} = \omega \frac{L_2 L}{I_1 \omega L_2} = \frac{L}{I_1}$$

frá síðu 4

6

Samhverfur snúður með fastan punkt (Lagrange)



Heppilegt að nota „fasta" oddinn sem upphaf beggja hnitakerfa

—> Euler hornin eru mjög hagleg að nota

$I_1 = I_2$, gerum ráð fyrir $I_3 \neq I_1$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{I_1}{2}\left\{\omega_1^2 + \omega_2^2\right\} + \frac{I_3}{2}\omega_3^2$$

En áður var leitt út

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= \dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \\ \omega_3^2 &= \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \end{aligned}$$

7

og því

$$T = \frac{I_1}{2}\left\{\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right\} + \frac{I_3}{2}\left\{\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right\}^2$$

$$L = T - Mgh\cos\theta$$

L er (cyclic) óháður ϕ og ψ, því eru kórskriðþungar þessara breyta varðveittar stærðir

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left\{I_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right\}\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = \text{fasti} \quad (*)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left\{\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right\} = \text{fasti} \quad (**)$$

sem eru horn -> p_ϕ og p_ψ eru hverfiþungar

Hverfiþungarnir um x_3' og x_3-ás eru fastir

8

Við notum varðveislu hverfiþunganna (*) og (**) til að leysa aftur við $\dot{\phi}$ og $\dot{\psi}$

$$(**) \longrightarrow \dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_3\dot{\phi}\cos\theta}{I_3}$$

notum í (*)

$$\longrightarrow \left\{I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right\}\dot{\phi} + \left\{p_\psi - I_3\dot{\phi}\cos\theta\right\}\cos\theta = p_\phi$$

$$\rightarrow I_1\sin^2\theta\cdot\dot{\phi} + p_\psi\cos\theta = p_\phi$$

$$\rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\left\{p_\phi - p_\psi\cos\theta\right\}\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

Kerfið er geymið

$$\to E = \frac{I_1}{2}\left\{\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right\} + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + Mgh\cos\theta = \text{fasti}$$

berum saman

$$p_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \text{fasti}$$

og $\omega_3 = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$

Gefur $p_\phi = I_3\omega_3 = \text{fasti}$ eða $I_3\omega_3^2 = \frac{p_\psi^2}{I_3} = \text{fasti}$

því er $E - \frac{I_3}{2}\omega_3^2 = E'$ varðveitt stærð

$$E' \equiv E - \frac{I_3}{2}\omega_3^2 = \frac{I_1}{2}\left\{\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right\} + Mgh\cos\theta = \text{fasti}$$

$$\boxed{E' = \frac{I_1\dot\theta^2}{2} + \frac{\{p_\phi - p_\psi\cos\theta\}^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta}$$

Við getum skilgreint virkt mætti (effective potential)

$$E' = \frac{I_1\dot\theta^2}{2} + V(\theta)$$

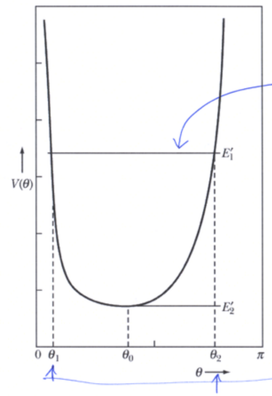
með

$$V(\theta) \equiv \frac{\{p_\phi - p_\psi\cos\theta\}^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta$$

$$\to \dot\theta^2 = \frac{2}{I_1}\left(E' - V(\theta)\right)$$

$$\to \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E' - V(\theta)\right)}$$

$$\to t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E' - V(\theta)\right)}}$$



hreyfing með E'_1 er takmörkuð á þessu svæði

↓

Viðsnúningspunktar

gefur formlega nákvæma lausn en við getum lært ýmislegt með athugunum á hreyfijöfnunum

* Halli snúðs með E'_1 takmarkast við bilið $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$
* Fyrir $E' = E'_2 = V_{min}$ er aðeins eitt horn mögulegt θ_0 og snúðurinn er í stöðugri veltu

↳ Hægt er að finna θ_0

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{-\cos\theta_0\{p_\phi - p_\psi\cos\theta_0\}^2 + p_\psi\sin^2\theta_0\{p_\phi - p_\psi\cos\theta_0\}}{I_1\sin^3\theta_0} - Mgh\sin\theta_0 = 0$$

Ef $\beta \equiv p_\phi - p_\psi\cos\theta_0$

þá fæst

$$\cos\theta_0\cdot\beta^2 - p_\psi\sin^2\theta_0\cdot\beta + MghI_1\sin^4\theta_0 = 0$$

$$\to \beta = \frac{p_\psi\sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MghI_1\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right\}$$

$\beta \in \mathbb{R}$

$$\to p_\psi^2 \geq 4MghI_1\cos\theta_0 \quad \text{og áður } p_\psi = I_3\omega_3$$

$$\to \omega_3 \geq \frac{2}{I_3}\sqrt{MghI_1\cos\theta_0}$$

stöðug velta er aðeins möguleg við fast horn θ_0 ef spunahraðinn er nógu mikill

Áður var komið

$$\dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

fyrir $\theta = \theta_0$ er þetta

$$\dot\phi = \frac{\beta}{I_1\sin^2\theta_0}$$

því gefa ræturnar fyrir $\beta_\pm$ tvenns konar veltu

$\dot\phi_{0(+)} \to$ hröð velta

$\dot\phi_{0(-)} \to$ hæg velta

Ef ω_3 (~~eða~~ P_ψ) sýnir hraðan spuna, má nálga

$$\dot\phi_{0(+)} \approx \frac{I_3\omega}{I_1\cos\theta_0}, \qquad \dot\phi_{0(-)} \approx \frac{Mgh}{I_3\omega_3}$$

sést venjulega

Við höfum skoðað allt hér fyrir $\theta_0 < \pi/2$

Ef $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ þá er staðan innan rótar í β alltaf >0

→ engin mörk á ω_3 og hæga og hraða veltan verða í sitthvora áttina

CM fyrir neðan fastan punkt

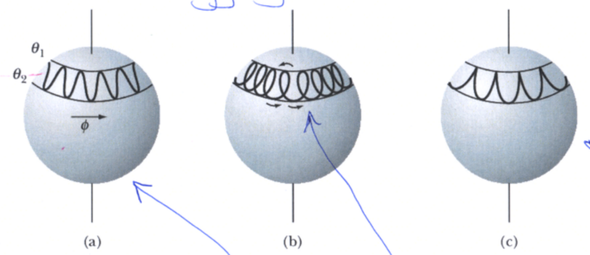
Vagg (nutation)

vagg og velta

$\theta_1 < \theta < \theta_2$

almenna tilfellið

$$\dot\phi = \frac{P_\phi - P_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$



→ $\dot\phi$ getur skipt um formerki þegar θ fer milli markanna θ_1 og θ_2 (er háð gildum á P_ϕ og P_ψ)

Ef $\dot\phi$ skiptir ekki um formerki → stöðug velta
en sveiflar milli θ_1 og θ_2 → vagg

Ef $\dot\phi$ skiptir um formerki þá fær $\dot\phi$ mismunandi stefnu við θ_1 og θ_2
→ vagg með lykkjum

Ef hlutfall P_ϕ og P_ψ er $(P_\phi - P_\psi\cos\theta)\big|_{\theta=\theta_1} = 0$ → $\dot\phi\big|_{\theta=\theta_1} = 0$ $\quad \dot\theta\big|_{\theta=\theta_1} = 0$
venjulega er snúði sleppt þannig ← tog niður vegna þyngdar

Töluleg lausn fyrir snúð

Ekki er heppilegt að nota E og E'. Í stað þess er hreyfijafnan út frá L best, nefnilega Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = 0$$

$$\to \quad \ddot\theta = \frac{Mgh}{I_1}\sin\theta - \frac{I_3}{I_1}\left\{\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right\}\dot\phi\sin\theta + \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta$$

auk

$$\dot\phi = \frac{S_z - B_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}, \qquad \dot\psi = \frac{B_3}{I_3} - \frac{(S_z - B_3\cos\theta)\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

þar sem

$$B_3 = P_\psi = \text{fasti}, \qquad S_z = P_\phi = \text{fasti}$$

Veljum

$I_3 = \frac{2}{5}MR^2$, $\quad M = 0{,}1$ Kg, $R = 0{,}04$m,

$I_2 = I_1 = \frac{I_3}{5}$

$h = R + \delta$, $\quad \delta = 0{,}01$ m

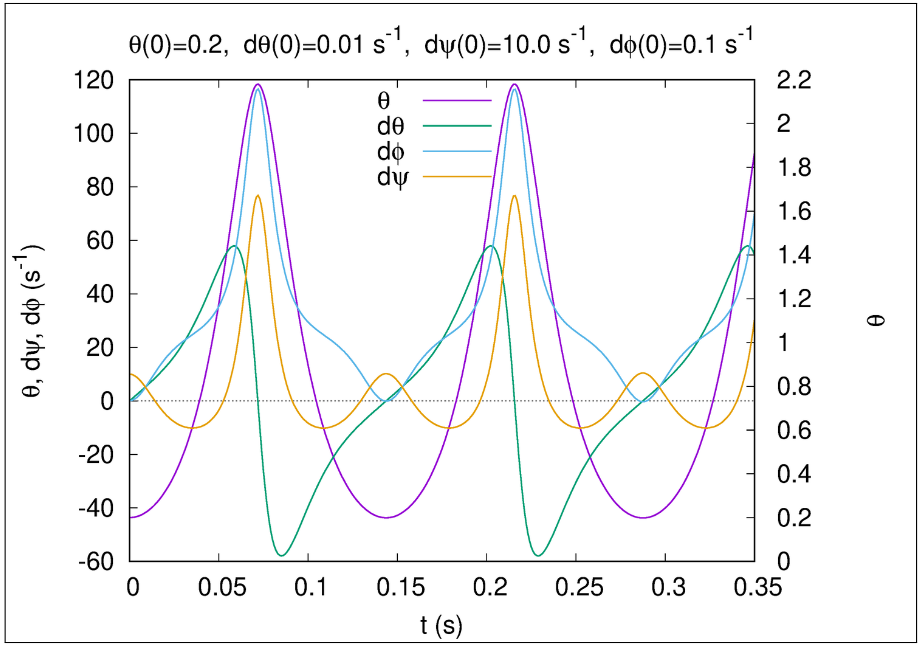
Notum síðan forritið góða af heimasíðu námskeiðs til að reikna tíma þróun kerfisins þegar við getum

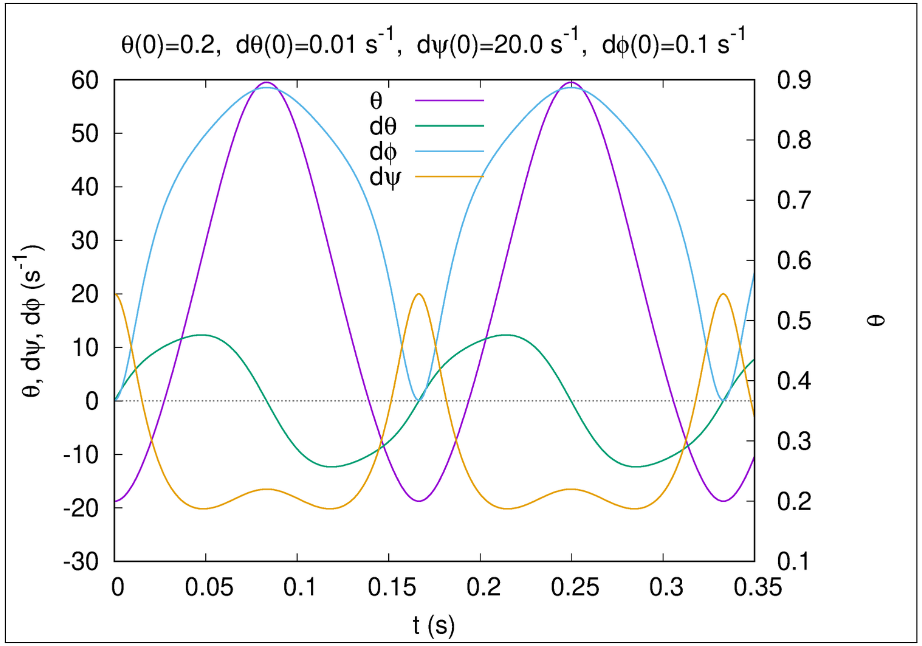
$\dot\psi(0)$
$\dot\phi(0)$
$\theta(0)$
$\dot\theta(0)$

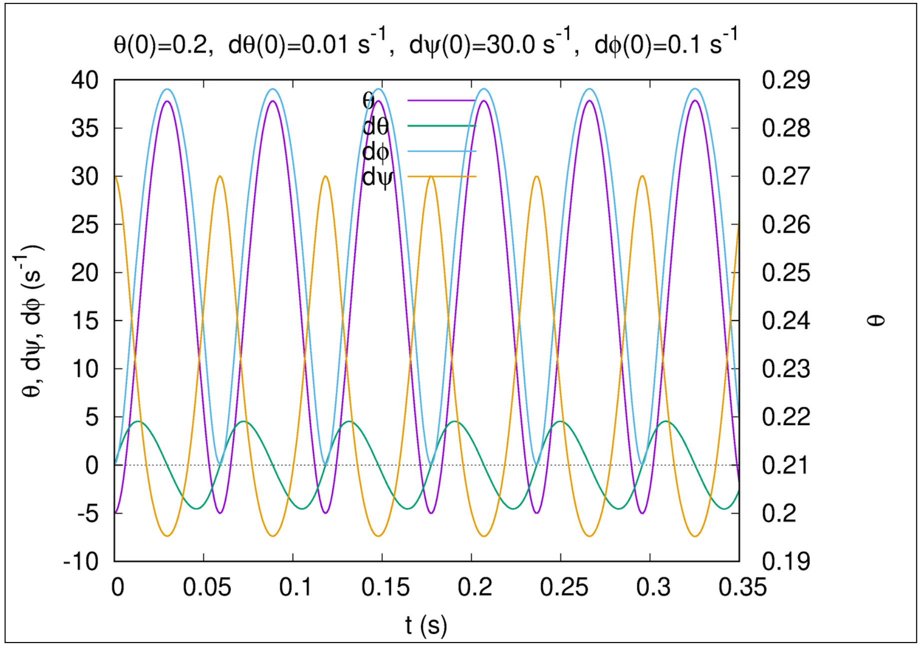
→ B_3 og S_z eru fastir

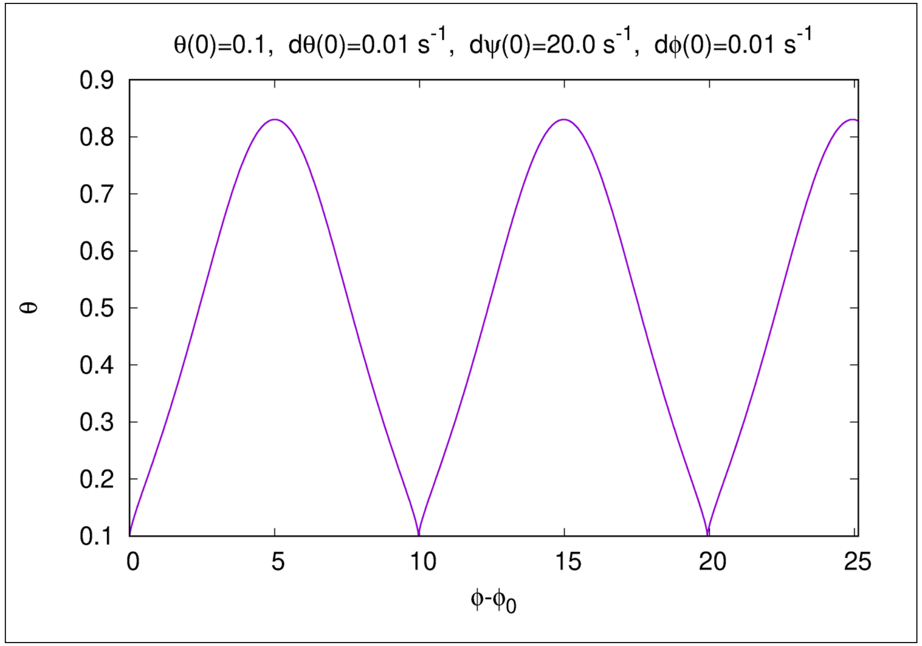
Nokkur gröf birtast á næstu síðum

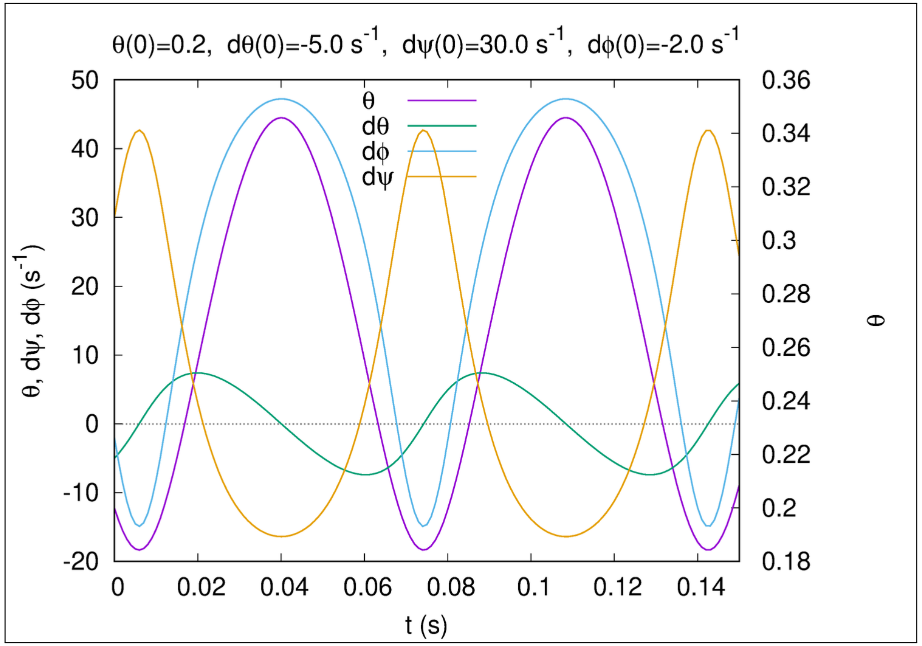
Umfjöllunin í Goldstein et. al. Third Ed. Classical Mechanics, hjálpar við val á upphafs gildum

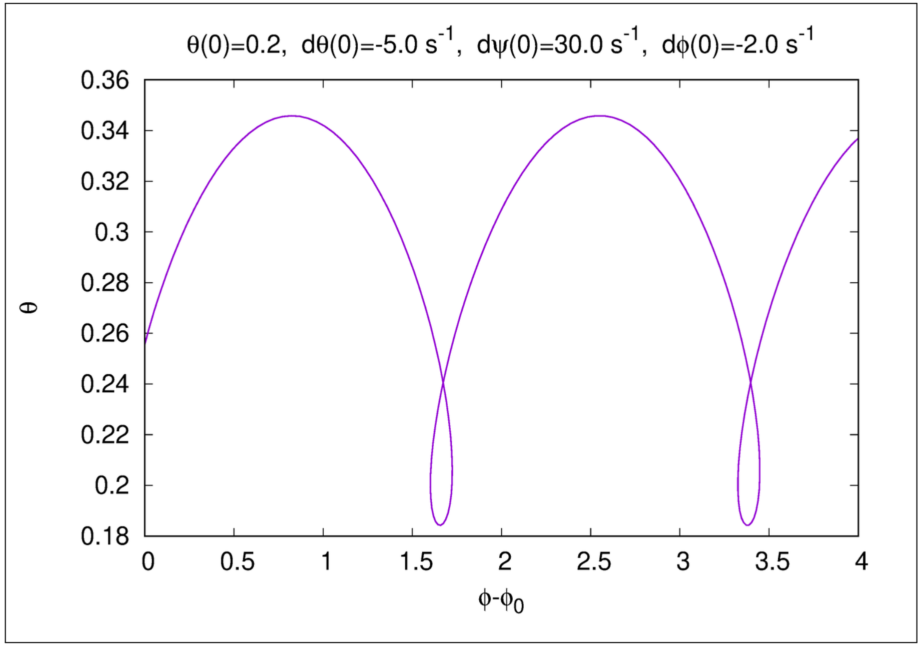

θ(0)=0.2, dθ(0)=0.01 s-1, dψ(0)=10.0 s-1, dϕ(0)=0.1 s-1
θ, dψ, dϕ (s-1)
θ
t (s)
θ
dθ
dϕ
dψ

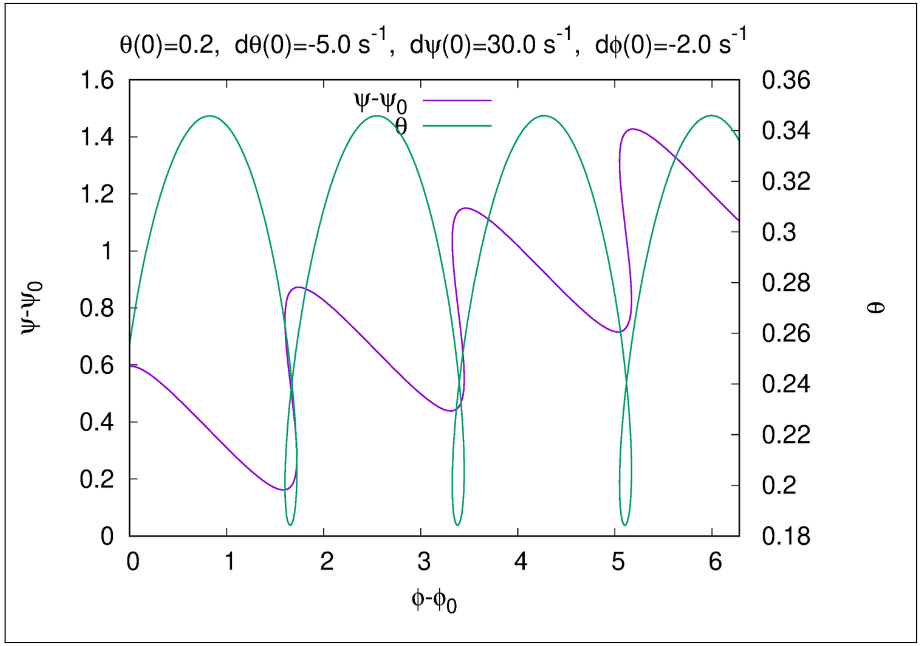

θ(0)=0.2, dθ(0)=0.01 s-1, dψ(0)=20.0 s-1, dϕ(0)=0.1 s-1
θ, dψ, dϕ (s-1)
θ
t (s)
θ
dθ
dϕ
dψ

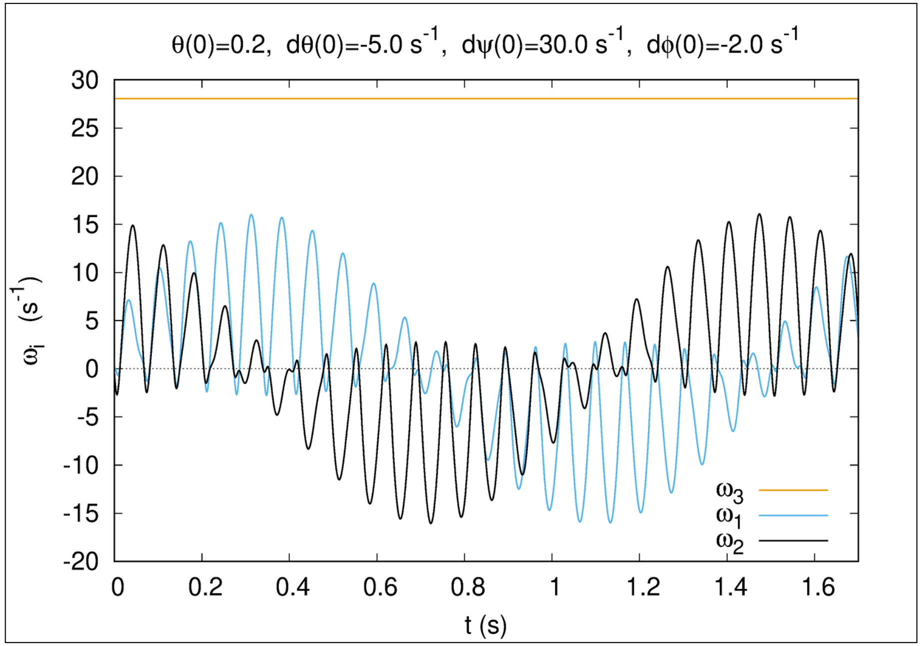

θ(0)=0.2, dθ(0)=0.01 s-1, dψ(0)=30.0 s-1, dϕ(0)=0.1 s-1
θ, dψ, dϕ (s-1)
θ
t (s)
θ
dθ
dϕ
dψ

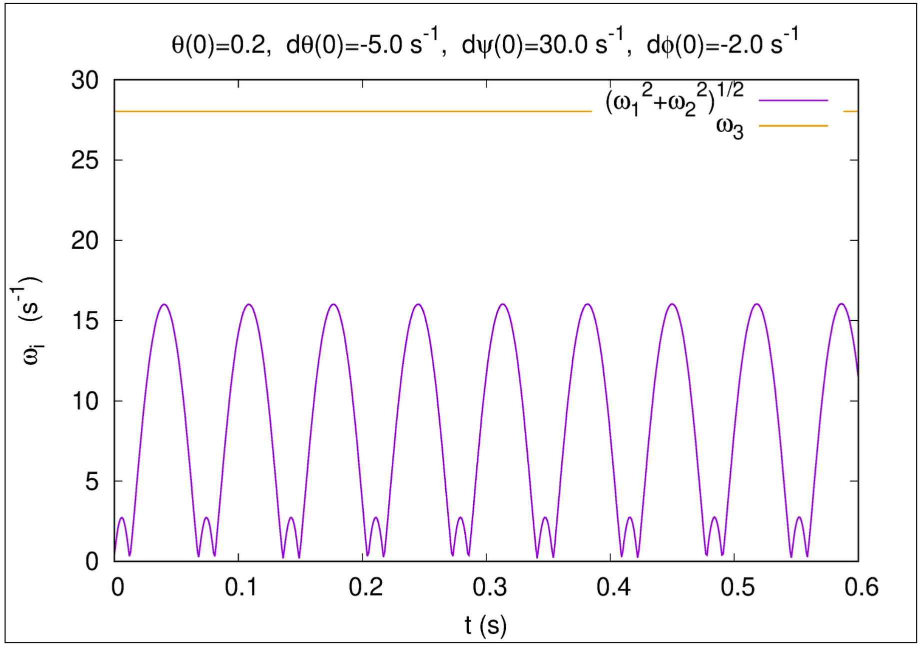

θ(0)=0.1, dθ(0)=0.01 s-1, dψ(0)=20.0 s-1, dϕ(0)=0.01 s-1
θ
ϕ-ϕ0

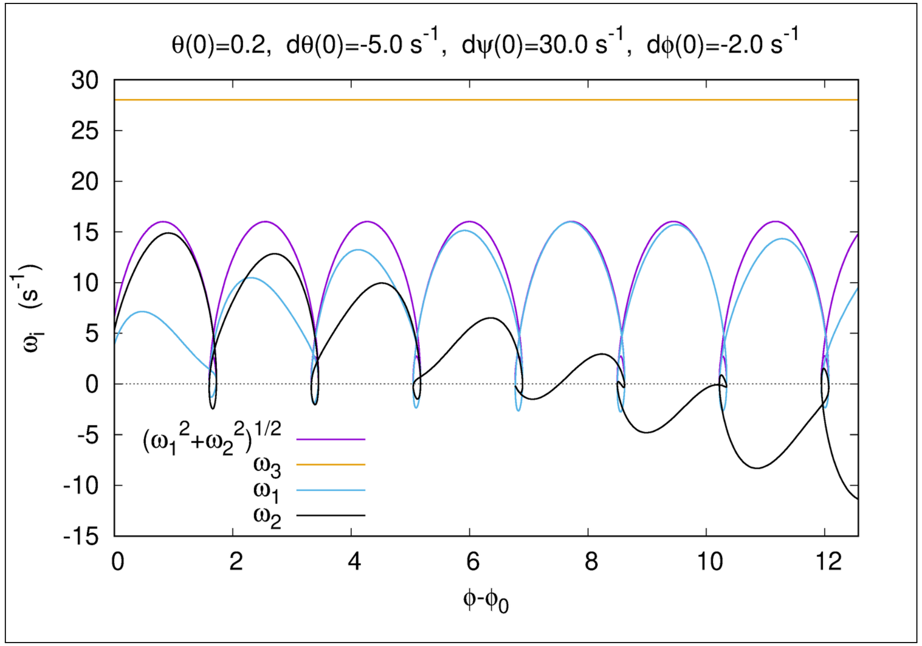

θ(0)=0.2, dθ(0)=-5.0 s^-1, dψ(0)=30.0 s^-1, dϕ(0)=-2.0 s^-1
θ
dθ
dϕ
dψ
θ, dψ, dϕ (s^-1)
θ
t (s)


θ(0)=0.2, dθ(0)=-5.0 s^-1, dψ(0)=30.0 s^-1, dϕ(0)=-2.0 s^-1
θ
ϕ-ϕ0


θ(0)=0.2, dθ(0)=-5.0 s^-1, dψ(0)=30.0 s^-1, dϕ(0)=-2.0 s^-1
ψ-ψ0
θ
ψ-ψ0
θ
ϕ-ϕ0


θ(0)=0.2, dθ(0)=-5.0 s^-1, dψ(0)=30.0 s^-1, dϕ(0)=-2.0 s^-1
ω3
ω1
ω2
ωi (s^-1)
t (s)





1

Stöðugleiki hringsnúnings

Engir ytri kraftar

$I_3 > I_2 > I_1$ um höfuðása

Veljum upphaf $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$

smá truflun

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3$$

með

$\lambda << \omega_1$

$\mu << \omega_1$

$$\to \frac{\lambda\mu}{\omega_1^2} << 1$$

Jöfnur Eulers

$$(I_2 - I_3)\lambda\mu - I_1\dot{\omega}_1 = 0$$

$$(I_3 - I_1)\mu\omega_1 - I_2\dot{\lambda} = 0$$

$$(I_1 - I_2)\lambda\omega_1 - I_3\dot{\mu} = 0$$

$\dot{\omega}_1 = 0 \to \omega_1 =$ fasti

en,

$$\dot{\lambda} = \left\{\frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1\right\}\mu$$

$$\dot{\mu} = \left\{\frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\right\}\lambda$$

tengdar 1. stigs afleiðujöfnur

tökum tíma afleiðu af fyrri jöfnunni

2

$$\to \quad \ddot{\lambda} + \left\{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}\omega_1^2\right\}\lambda = 0$$

með lausn

$$\lambda(t) = Ae^{i\Omega_{1\lambda}t} + Be^{-i\Omega_{1\lambda}t}$$

lausn fyrir λ þ. hlutur snúngs um 1-ás.

með

$$\Omega_{1\lambda} = \omega_1\sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}}$$

$I_1 < I_3$

$I_1 < I_2$

$\to \Omega_{1\lambda} \in \mathbb{R}$

Smáar sveiflur um x_2- og x_3-ása vaxa ekki í tíma, stöðugur snúningur um x_1-ás

En, höldum $I_3 > I_2 > I_1$

snúningur í upphafi um

x_2- ~~eða~~ x_3-ás

leiðir til

$$\Omega_2 = \omega_2\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3}}$$

$$\Omega_3 = \omega_3\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}}$$

→ $\Omega_2 \notin \mathbb{R}$ → snúningur um x_1- og x_3-ás er stöðugur

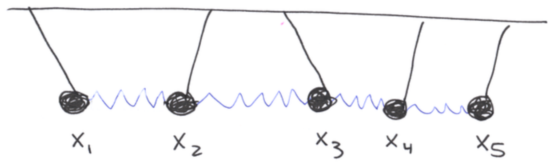
En, snúningur um x_2-ás er ekki stöðugur

Snúningur um höfuðása með minnsta eða stærsta hverfiþunga er stöðugur

Ef $I_1 = I_2 \neq I_3$ þá fæst að aðeins snúningur um x_3 er stöðugur, hvort sem I_3 er meiri eða minni en $I_2 = I_1$

Tengdar sveiflur

Skoðum kerfi tengdra sveifla t.d.



Byrjum með hvít þeirra → N-tengdar 2. stigs afleiðujöfnur

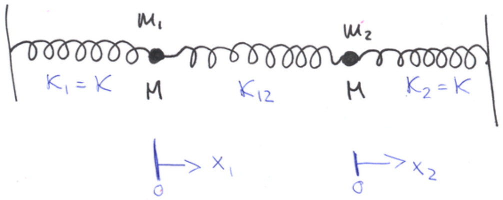
Komumst að því að í stað „N-tengdra pendúla" er heppilegra að fjalla um N-óháða sveifluhætti

Hliðstæða

N-víxlverkandi eindir ⟺ N-frjálsar sýndareindir

Skoðum dæmi áður en við setjum fram almennar aðferðir

Tveir tengdir hreintóna sveiflar



Kraftur á m_1: $\quad -Kx_1 - K_{12}(x_1 - x_2)$

Kraftur á m_2: $\quad -Kx_2 - K_{12}(x_2 - x_1)$

→ Hreyfijöfnur

$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (K+K_{12})x_1 - K_{12}x_2 &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + (K+K_{12})x_2 - K_{12}x_1 &= 0 \end{aligned}}$$

Reynum lausn

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

2 annars stigs jöfnur → 4 óþekktir stuðlar. $e^{i\omega t}$ leyfir fasa, tökum Re

$B_i \in \mathbb{C}$ og fleiri en ein tíðni getur fundist

Reynum lausnir

$$-M\omega^2 B_1 e^{i\omega t} + (K+K_{12})B_1 e^{i\omega t} - K_{12}B_2 e^{i\omega t} = 0$$

$$-M\omega^2 B_2 e^{i\omega t} + (K+K_{12})B_2 e^{i\omega t} - K_{12}B_1 e^{i\omega t} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} K+K_{12}-M\omega^2 & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12}-M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0} \quad (*)$$

Umskrifum þetta sem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix}}_{\text{þekkt}}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \omega^2 M \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

óþekkt

$Ab = \lambda b$

eiginverkefni

Eigingildin eru

$$\lambda = \begin{cases} K + 2K_{12} \\ K \end{cases}$$

eða

$$\omega^2 = \begin{cases} \dfrac{K+2K_{12}}{M} \\[2mm] \dfrac{K}{M} \end{cases}$$

Eigintíðnir kerfisins eru því

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Eiginvigrarnir eru

$$b_1 = B_1(1,-1)$$

$$b_2 = B_2(1,1)$$

Heildarlausn á hreyfijöfnunum má finna, en áður útbúum við

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

einöku ummyndun

$$\longrightarrow \quad UU^t = \mathbb{1}$$

$$U^tAU = \begin{pmatrix} K+2K_{12} & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = A_{diag}$$

Skoðum aftur hreyfijöfnurnar

$$M\ddot{x}_1 + (K+K_{12})x_1 - K_{12}x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (K+K_{12})x_2 - K_{12}x_1 = 0$$

umritum sem

$$M\frac{d^2}{dt^2}\bar{x} = A\bar{x}$$

þar sem

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ummyndum með U

$$M\frac{d^2}{dt^2}(U^t\bar{x}) = U^tAU(U^t\bar{x})$$

$$\boxed{M\frac{d^2}{dt^2}(U^t\bar{x}) = A_{diag}(U^t\bar{x})}$$

$$U^t\bar{x} = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2)\frac{1}{2}$$

$$\equiv (\eta_1, \eta_2)$$

Grunnlausnirnar eru því

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_1(t) &= C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t} \\ \eta_2(t) &= C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned}}$$

sem eru ótengdir eiginsveifluhættir kerfisins (normal hættir)

enda hreyfijöfnurnar fyrir $U\bar{x}$ ótengdar

Lausnirnar fyrir staðarhnit sveiflana

$$x_1(t) = \{\eta_2(t) + \eta_1(t)\}$$

og

$$x_2(t) = \{\eta_2(t) - \eta_1(t)\}$$

eru ekki óháðar

Ef $x_1(0) = x_2(0)$
$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$

$\longrightarrow \eta_1(t) = 0$ f. $\forall t$

samfasa sveiflur með ω_2

Samhverfur

Ef $x_1(0) = -x_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$ $\longrightarrow$ $\eta_2(0) = 0$, $\dot{\eta}_2(0) = 0$, $C_2^+ = 0$, $C_2^- = 0$ $\longrightarrow$ $\eta_2(t) = 0$

$\eta_1(t)$ lýsir andsamhverfum sveiflum f. $\forall t$ með ω_1

Almennt gildir að samfasa sveifluháttur er með lægri orku en samsvarandi andsamhverfur

Enga orku þarf í miðgorminn hér fyrir samfasasveiflur

Ef við festum m_2 og látum m_1 sveiflast þá gerist það með tíðni $\sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$ sama tíðni fæst fyrir m_1 fastan og m_2 lausan

Köllum $\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$

grunntíðnina fyrir ótengdu massana, þá fæst klofnun vegna víxlverkunar

$\omega_0 \rightarrow \omega_1$ andsamfasa

$\omega_0 \rightarrow \omega_2$ samfasa

Veik tenging

Fengum hér að framan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Ef $K_{12} << K$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}\left(1+\frac{2K_{12}}{K}\right)}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1+\frac{2K_{12}}{K}\right)^{1/2}$$

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1+\frac{K_{12}}{K}\cdots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1+2\epsilon\right)$$

ef $\epsilon \equiv \frac{K_{12}}{2K} << 1$

þá fæst líka

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}} \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}(1+\epsilon)$$

eða

$$\sqrt{\frac{K}{M}} \simeq \omega_0(1-\epsilon)$$

$$\rightarrow \omega_1 \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}(1+2\epsilon) \simeq \omega_0(1-\epsilon)(1+2\epsilon) \simeq \omega_0(1+\epsilon), \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}} \simeq \omega_0(1-\epsilon)$$

Hreyfum aðeins annan sveifilinn upphaflega

$$x_1(0) = D \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

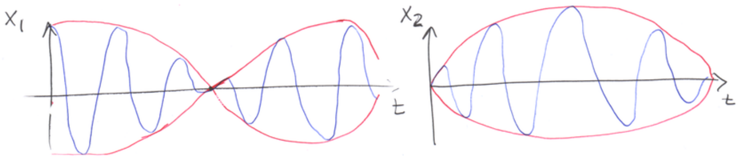
$$\rightarrow x_1(t) = \frac{D}{4}\left\{\left(e^{i\omega_1 t}+e^{-i\omega_1 t}\right)+\left(e^{i\omega_2 t}+e^{-i\omega_2 t}\right)\right\}$$

$$= \frac{D}{2}\left\{\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)\right\}$$

$$= D\cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}_{=\omega_0 t}\Big)\cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t}_{=\epsilon\omega_0}\Big) = \overbrace{\left[D\cos(\epsilon\omega_0 t)\right]}^{\text{umslag}}\cos(\omega_0 t)$$

burðartíð

$$\boxed{\text{veik tenging hægur flutningur orku milli sveiflna}}$$



Tengdar sveiflur, almenn nálgun ([illegible])

n-frelsisgráður, geymið kerfi

alhnit q_k $k = 1, 2, \cdots n$

ummyndanir hnita óháð t

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$$

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

Jafnvægisástand er til:

$q_k = q_{k0}$ með

$\dot{q}_k = 0, \quad \ddot{q}_k = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\Big|_0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k}\Big|_0 = \frac{\partial T}{\partial q_k}\Big|_0 - \frac{\partial U}{\partial q_k}\Big|_0 = 0$$

því fæst eins og við sáum áður að T er óhliðrað 2. stigs fall af alhröðunum

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_k}\Big|_0 = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

og því

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}\Big|_0 = 0$$

Veljum að alhnitin séu miðuð við jafnvægisstöðuna

$\rightarrow q_{k0} = 0$

$$\rightarrow U(q_1 \cdots q_n) = \underbrace{U_0}_{} + \sum_k \overbrace{\frac{\partial U}{\partial q_k}\Big|_0}^{=0} q_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\Big|_0 q_j q_k + \cdots$$

veljum 0-punkt þ.a. $U_0 = 0$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \quad \text{með} \quad \underbrace{A_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\Big|_0}_{}$$

A er samhverft í j og k

$$U \geq 0$$

$$T \geq 0$$

3

Því fæst

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\,\dot q_j\,\dot q_k$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}\,q_j\,q_k$$

m þarf ekki að vera hornalínufylki

$m_{rs}\,\dot q_r\,\dot q_s$ táknar víxlverkun í gegnum hraða

Náum í hreyfijöfnur

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}=\sum_j A_{jk}\,q_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}=\sum_j m_{jk}\,\dot q_j$$

$$\to\ \sum_j\left\{A_{jk}\,q_j+m_{jk}\,\ddot q_j\right\}=0$$

n 2. stigs línulegar tengdar afleiðujöfnur með föstum stuðlum

Giskum á lausn $q_j(t)=a_j e^{i(\omega t-\delta)}$

tveir óákveðnir fastar

4

Í þessu geymna (lokaða) kerfi getur ω aðeins verið rauntala $\omega\in\mathbb{R}$

Innsetning gefur jöfnuhneppið

$$\boxed{\sum_j\left\{A_{jk}-\omega^2 m_{jk}\right\}a_j=0}$$

sem hefur ekki lausn nema ákveðan sé 0, en umritum

$$\boxed{A\bar a=\omega^2 M\bar a}$$

sem er almenn eigingildisjafna sem má nota til að ákvarða eigingildin ω^2 og eiginvigrana $\bar a$ sem lýsa sveifluháttunum

5

Almenna lausnin er

$$\boxed{q_j(t)=\sum_r a_{jr}\,e^{i(\omega_r t-\delta_r)}}$$

← bera saman við almenna lausn á jöfnu Schrödingers

summað yfir alla sveifluhætti

eða

$$\boxed{\mathrm{Re}(q_j(t))=\sum_r a_{jr}\cos\{\omega_r t-\delta_r\}}$$

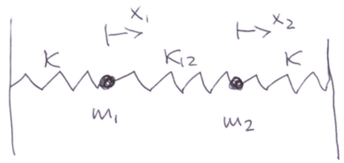
Eigingildin geta verið margföld, og aftur má nýta eiginvigrana til að útbúa ummyndanir milli upphaflegu alhnitanna og nýju alhnitanna fyrir n-óháða sveiflu

$A\bar a=\omega^2 M\bar a$ er venjulega ekki leyst sem $(M^{-1}A)\bar a=\omega^2\bar a$ því samhverfa getur tapast og andhverfur eru dýrar í reikningum.

6

Endurtekið dæmi um tvo tengda sveifla

Notum U í stað krafta



$$U=\frac{k}{2}x_1^2+\frac{k_{12}}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{k}{2}x_2^2$$

$$=\frac{k+k_{12}}{2}x_1^2+\frac{k+k_{12}}{2}x_2^2\underbrace{-k_{12}x_1x_2}_{\text{víxlverkun milli } m_1 \text{ og } m_2}$$

$$A_{11}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0=k+k_{12}$$

$$A_{22}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0=k+k_{12}$$

$$A_{12}=A_{21}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}\right|_0=-k_{12}$$

$$T=\frac{M}{2}\dot x_1^2+\frac{M}{2}\dot x_2^2$$

bera saman við $T=\frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot x_j\dot x_k$

$$\to\ m_{11}=m_{22}=M$$

$$m_{12}=m_{21}=0$$

Því fæst

$$A = \begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A\bar{a} = \omega^2 M \bar{a} \quad = \omega^2 M \bar{a}$$

$$\begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \omega^2 M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

og við fáum eins og áður að og tvo eiginvigra

$$\bar{a}_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \bar{a}_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A og M eru samhverf raungild jákvæð ákveðin „fylki" (þinir).

Eigingildin eru raungild

Ef við tökum saman eiginvigrana og röðum saman í fylki

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1)_1 & \cdots & (a_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1)_n & \cdots & (a_n)_n \end{pmatrix}$$

Þá fæst

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda^t M \Lambda = 1 \\ \Lambda^t A \Lambda = \Omega^2 \end{array}\right\} \qquad \Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ummyndunin } \Lambda \text{ hornalínugerir } A\text{, en } \Lambda\Lambda^t = M}$

þeir eru ekki hornréttir fyrir almenna eigingildisverkefnið

Eiginhnit ↔ (normal coordinates)

Almenna lausnin var

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

Síðan sáum við að liðunarstuðlarnir (eiginvigrana) má staðla. Ef við setjum að þeir séu staðlaðir verðum við að bæta við heildarstika fyrir hvern eiginvigur þ.a. hægt sé að uppfylla upphafsskilyrði

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

Einföldum táknunina $\quad q_j(t) = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t}, \qquad \beta_r = \alpha_r e^{-i\delta_r}$

Skilgreinum svo

$$\boxed{\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)}$$

η_r er stærð sem sveiflast aðeins með einni tíðni ω_r

Lítum á η_r sem ný hnit, eiginhnit

Þau uppfylla jöfnur $\quad \ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$

Sem eru n-að tölu, n-óháðar jöfnur fyrir eiginhnitin

Dæmi (útleiðsla hreyfijafna fyrir η_r)

$$q_j = \sum_r a_{jr}\eta_r \quad \to \quad \dot{q}_j = \sum_r a_{jr}\dot{\eta}_r$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\left\{\sum_r a_{jr}\dot{\eta}_r\right\}\left\{\sum_s a_{ks}\dot{\eta}_s\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\left\{\sum_{jk} m_{jk} a_{jr} a_{ks}\right\}}_{(\Lambda^t M \Lambda = 1)_{rs} = \delta_{rs}}\dot{\eta}_r\dot{\eta}_s = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\dot{\eta}_r\dot{\eta}_s\delta_{rs}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r \dot{\eta}_r^2$$

Eins fæst

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\left\{\sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks}\right\}}_{(\Omega^2)_{rs} = \omega_s^2\delta_{rs}}\eta_r\eta_s$$

$$\to U = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\omega_s^2\eta_r\eta_s\delta_{rs} = \frac{1}{2}\sum_r \omega_r^2\eta_r^2$$

$$\to L = T - U = \frac{1}{2}\sum_r\left\{\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2\eta_r^2\right\}$$

Notum $\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \eta_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_r}\right) = 0}$ $\to$ $\boxed{\ddot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = 0}$

Hvernig er best að leysa eigingildisverkefnið

$$A\bar{a} - \omega^2 M\bar{a} = 0$$

þegar $M \neq \alpha\mathbb{1}$. Erfitt getur reynst að finna Λ þ.a.

$$\Lambda^t M \Lambda = \mathbb{1} \quad \text{og} \quad \Lambda^t A \Lambda = \Omega^2$$

Fyrir lítil verkefni má nota aðferðir bókanna tveggja og vinna með

$$\det\left\{A - \omega^2 M\right\} = 0$$

Ekki er gott að nota M^{-1} vegna samhverfunnissis, en heppilegt er að muna eftir Cholesky LU-þáttun

L: lægra þríhyrningsfylki, U: efra þríhyrningsfylki

Þetta er aðeins hægt fyrir jákvætt ákveðin fylki, sem M er því fyrir alla vigra v gildir

$$\boxed{v^T M v > 0}$$ hreyfiorkan er jákvæð

Finnum þá

$$L L^T = M$$ í raun kvaðratrót M

$$\to A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a} = \omega^2 L L^T\bar{a} = \omega^2 L(L^T\bar{a})$$

$$\to L^{-1}A\bar{a} = \omega^2(L^T\bar{a})$$

$$\to \boxed{L^{-1}A\underbrace{(L^T)^{-1}(L^T\bar{a})}_{\mathbb{1}\bar{a}} = \omega^2(L^T\bar{a})}$$

höfum umrugðað verkefnið í samhverft verkefni

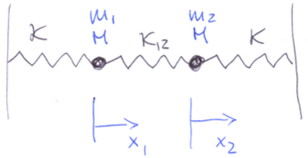
Einfalt algrím má finna á vefnum.

Í wxMaxima er til cholesky-þáttun fyrir töluleg fylki

Í Intel MKL eru til FORTRAN og C undirstefjur (með samhliðavinnslu) sem gera þetta fyrir stór verkefni

---

Tveir tengdir sveiflar eru



Höfum séð að

$$A = \begin{bmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = M\mathbb{1}$$

Þurfum að leysa

$$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$$

Eigingildin eru

$$\omega_1^2 M = K + 2K_{12} \to \omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2^2 M = K \to \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

með eiginvigra (óstaðlaða)

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stöðluð ummyndun

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{a} = \omega^2 M\bar{a}$$ ekki á hornalínuham

$$U^t A U (U^t\bar{a}) = \omega^2 M (U^t\bar{a})$$ á hornalínuham

Búum með stöðlun á U

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to U^t\bar{a} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix} = \bar{\eta}$$

$$U^t\bar{a} = \bar{\eta} \to \bar{a} = U\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

η_r eru eiginlausnir með eigintíðni ω_r

setjum $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$ stuðlum + upphafsgildi-vídd, og fasi $e^{i\delta_r}$

Því er lausnin

$$x_1(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) = \beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$x_2(t) = \eta_2(t) - \eta_1(t) = -\beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{i\omega_2 t}$$

sem er hægt að bera saman við almenna lausnar formið

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$$

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$$

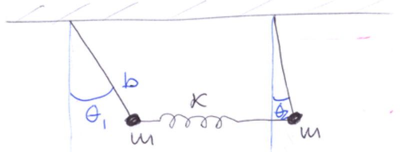
$\eta_1 = 0$ ef $x_1 = x_2 \to$ samfasa sveifla með $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

$\eta_2 = 0$ ef $x_1 = -x_2 \to$ andfasa sveifla með $\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$

í andfasa reynir á K_{12}-gorminn!

Dæmi, tveir tengdir pendúlar

(4)



$$T = \frac{m}{2}(b\dot\theta_1)^2 + \frac{m}{2}(b\dot\theta_2)^2$$

$$U = mgb(1-\cos\theta_1) + mgb(1-\cos\theta_2) + \frac{K}{2}\underbrace{\{b\sin\theta_1 - b\sin\theta_2\}^2}$$

Í jafnvægi þ.e. $\theta_1 = 0$ og $\theta_2 = 0$ er gormurinn óteygður og óbjagaður

Gerum ráð fyrir litlum sveiflum, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$

$$\to U = \frac{mgb}{2}\{\theta_1^2 + \theta_2^2\} + \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\to M = \begin{bmatrix} mb^2 & 0 \\ 0 & mb^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgb + Kb^2 & -Kb^2 \\ -Kb^2 & mgb + Kb^2 \end{bmatrix}$$

Þá fást eigingildin

(5)

$$\omega_1^2 mb^2 = mgb + Kb^2 \quad \to \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{b} + \frac{2K}{m}}$$

$$\omega_2^2 mb^2 = mgb \quad \to \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

$$U \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^t \bar a = \bar\eta$$

með eiginvigra

$$\bar a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \bar a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \theta_1 - \theta_2 \\ \eta_2 &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

eða

$$\theta_1 \sim \eta_1 + \eta_2$$
$$\theta_2 \sim \eta_2 - \eta_1$$

$\eta_1 = 0$ ef $\theta_1 = \theta_2$

$\to \eta_2$ er virkur með $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{b}}$

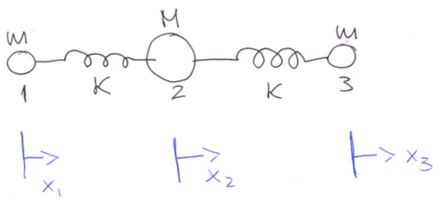
samfasa sveifla þ.a. K kemur ekki við sögu

$$\bar a = U\bar\eta$$

Dæmi

(6)

Skoðum línulega sveifluhætti sem geta komið upp í t.d. CO_2



Við viljum sérstaklega sjá hér hvernig mismunandi massar koma inn

Engin hliðrun CM $\to$ skorður $\quad m\{x_1 + x_3\} + Mx_2 = 0$

$$\to x_2 = -\frac{m}{M}\{x_1 + x_3\}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot x_3^2 + \frac{1}{2}M\dot x_2^2$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot x_1^2 + \dot x_3^2\} + \frac{m^2}{2M}\{\dot x_1^2 + \dot x_3^2 + 2\dot x_1\dot x_3\}$$

hraðavíxlverkun

(7)

Viljum losna við hraðatengsl, notum ný hnit

$$q_1 = x_3 + x_1$$
$$q_2 = x_3 - x_1$$

$$\to x_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

$$x_1 = \frac{q_1 - q_2}{2}$$

$$x_2 = -\frac{m}{M}\{x_1 + x_3\} = -\frac{m}{M}q_1$$

$$\to T = \frac{m}{4}\dot q_2^2 + \frac{mM + 2m^2}{4M}\dot q_1^2$$

$$U = \frac{K}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{K}{2}(x_3 - x_2)^2$$

$$= \left(\frac{2m + M}{2M}\right)^2 K q_1^2 + \frac{K}{4}q_2^2$$

$$\to A = \begin{Bmatrix} \frac{K}{2}\left(\frac{2m+M}{M}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{K}{2} \end{Bmatrix}$$

$$M = \begin{Bmatrix} \frac{mM + 2m^2}{2M} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{Bmatrix}$$

8

$A\bar{a} = \omega^2 M \bar{a}$, M er á hornalínuham

$\to \left(M^{-1}A\right)\bar{a} = \omega^2 \bar{a}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2M}{mM+2m^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{K}{2}\left(\frac{2m+M}{M}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{K}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K}{mM}(M+2m) & 0 \\ 0 & \frac{K}{m} \end{pmatrix}$$

$\bar{a}$ hornalínuham $\to$ með eiginvigra

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}\cdot\frac{M+2m}{m}} \qquad \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

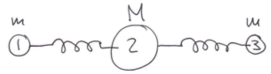
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$q_1 \sim \eta_1$

$q_2 \sim \eta_2$

9

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= x_3 + x_1 \\ q_2 &= x_3 - x_1 \end{aligned}\right\}$$



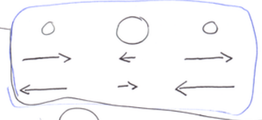
Ef $x_3 - x_1 = 0 \to \eta_2 = 0$ $\to \eta_1$ virkar $\sim q_1$ með ω_1

m_1 og m_3 í fasa

Ef $x_3 + x_1 = 0$

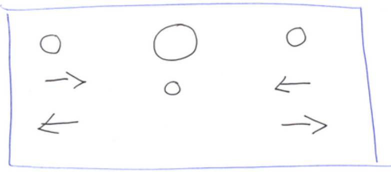
$\eta_1 = 0$ með η_2 virkan með ω_2

með $x_2 = -\frac{2m}{M}x_1$ úr fasa



$x_3 = -x_1$ og $x_2 = x_3 + x_1 = 0$

M kyrr með m_1 í andfasa við m_3



10

Dæmi: 3 pendúlar (margfeldni)

Berum saman við dæmið með 2 tengdum pendúlum

$$T = \frac{Ml^2}{2}\left\{\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2\right\}$$

$$U = \frac{Mgl + Kl^2}{2}\left\{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right\} - Kl^2\left\{\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3\right\}$$

$$M = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} Ml^2 \qquad A = \left(Mgl + Kl^2\right)\begin{Bmatrix} 1 & -\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon & 1 \end{Bmatrix}$$

þar sem $\epsilon = \frac{Kl^2}{Mgl + Kl^2}$ leysum $A\bar{a} = \omega^2 Ml^2 \bar{a}$

11

$$\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon & 1 \end{pmatrix}\bar{a} = \frac{\omega^2 Ml^2}{Mgl + Kl^2}\bar{a}$$

$$\to \omega^2\frac{Ml^2}{Mgl + Kl^2} = \begin{cases} 1 - 2\epsilon & \text{með } \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 + \epsilon & \text{með } \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 + \epsilon & \text{með } \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

tvöfalt eigingildi

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0$ en $\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \neq 0$

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 = 0$

$\bar{a}_3$ og $\bar{a}_2$ spanna hlutrúm og innan þess þarf að mynda tvo hornrétta vigra

(12)

Hér er ekki hægt að nota eiginvigrana beint til að mynda hornrétta ummyndun. Sú ummyndun þarf fyrir alla vigrana

En $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ má tengja við samfasa sveiflu allra sveiflanna, og hina má tengja við sveiflur úr fasa.

Hér þarf almennari aðferð til að finna hornrétta eiginvigra sem myndað geta hornrétta ummyndun

Í tölulegum reikningum má stækka kerfið örlítið, og vinna með aðferð Jacobis: sjá James Demmel og Krešimir Veselić, SIAM J. Matrix Anal. & Appl., 13 (4), 1204 (2006)

(12b)

Svo tilraunavinna sýnir að við getum valið

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

og endurunnið hina þ.a.

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \bar{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Sem verða þá hornréttir, $\bar{a}_2\cdot\bar{a}_3=0$ og enn líka hornréttir á $\bar{a}_1$: $\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2=0$, $\bar{a}_1\cdot\bar{a}_3=0$

útbúum

$$U = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

og fengið

$$U^t A U = \begin{pmatrix}1-2\epsilon & 0 & 0\\ 0 & 1+\epsilon & 0\\ 0 & 0 & 1+\epsilon\end{pmatrix}$$

(12c)

Normal hættirnir eru síðan

$$\bar{\eta} = U^t\bar{\theta} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\theta_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_2, \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_3\\ 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\theta_3\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\theta_1, \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_2, \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_3\end{pmatrix}$$

samfasa sveifla með lægsta tíðnina

tveir í andfasa

tveir í fasa og sá þriðji úr fasa með tvöfalda sveiflu

allir hornréttir

CM-sveifla án innri sveiflu

Engin CM-sveifla bara innri sveifla

(13)

Til samanburðar (fyrir næsta viðfangsefni)

Hugsum okkur hreintóna sveifil í skammtafræði

$$H_0 = \hbar\omega\{a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\}$$

bætum við hann

$$H_I = \hbar\omega f(a^\dagger a)$$

þ.a. í grunni eiginástanda H_0, $\{|n\rangle\}$ er $H = H_0 + H_I$ ekki hornalínufylki

Tímaþróun kerfisins er lýst með

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

Í grunni H_0 útsest þetta sem

sem tengdar afleiðujöfnur

$$i\hbar\partial_t|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$$

þ.s. $|\alpha(t)\rangle$ er ekki með einfalda tímaþróun

Til er ummyndun U þ.a.

$$U^\dagger H U = H_{diag}$$

þ.s. H_{diag} er á hornalínuham með eigingildi H á hornalínunni

$$\rightarrow \quad i\hbar\partial_t\left(U^\dagger|\alpha(t)\rangle\right) = U^\dagger H U\left(U^\dagger|\alpha(t)\rangle\right)$$

þ.s.

$$|n\rangle e^{-i\omega_n t} = \sum_\alpha C^*_{\alpha n}|\alpha(t)\rangle$$

sem má skrifa við

$$\sum_n C_{\alpha n} |n) e^{-i\omega_n t} = |\alpha(t))$$

Hér eru

$$H |n) = \hbar\omega_n |n)$$

$$U^+ H U = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \hbar\omega_n \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$U^+ U = \mathbb{1}$$

Hér var ekki „explicit" notað að

$$H_0 |n\rangle = E_n^0 |n\rangle \qquad n = 0, 1, \ldots$$

með $E_n^0 = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Við gáfum okkur engar upplýsingar um orkuróf H, $\hbar\omega_n$