Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Námsbraut í eðlisfræði

EÐL302G Aflfræði

Sjúkrapróf janúar 2021,
Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, tölvur, öll prentuð og skrifuð gögn á pappír eða rafrænum ham, vafrar, vasareiknivélar, algebru- og grafíkforrit.

Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fjögur þeirra. Skrifið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

- Nemandi má ekki þiggja aðstoð frá öðrum en kennara námskeiðsins.
- Nemendur mega koma með fyrirspurnir á tölvupóstfangið `vidar@hi.is`.
- Ekki má sýna neinum prófverkefnið eða dreifa því meðan á prófinu stendur.
- Nemendur mega ekki hafa neitt samband sín á milli meðan á prófinu stendur.
- Aðeins má nota þau hjálpargögn sem tiltekin eru á prófblaði.
- Ef úrlausn er ekki skilað þá fær nemandi falleinkunn.

Ég geri mér grein fyrir því að kennari hefur fullan rétt til þess að fresta einkunnargjöf um óákveðinn tíma og krefja mig skýringa á úrlausn minni síðar, ef hann grunar að ég hafi ekki fylgt reglum um próftöku.

Ég skil að brot á reglum Háskóla Íslands getur haft í för með sér þung viðurlög eins og fall í námskeiði, en einnig áminningu eða brottvikningu úr skóla, tímabundið eða fyrir fullt og allt.

Kennari treystir nemanda til þess að fylgja öllum reglum, vanda úrlausn sína, leggja sig allan fram og láta sér ekki til hugar koma að svindla á prófinu. Með skil á úrlausn undirgengst nemandi þessi skilyrði.

1. **Íslenska**: Ögn með massa m hreyfist á alhálu yfirborði sem lýst er með jöfnunni

$$z = z_0 \ln\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1\right\}, \qquad a, z_0 > 0$$

í sívalningshnitum, (r, ϕ, z).

(a) Finnið hreyfi- og stöðuorku agnarinnar.

(b) Hvaða hnit er þægilegt að nota sem alhnit?

(c) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.

(d) Er eitthvert alhnitið rásað?

(e) Finnið hreyfijöfnur agnarinnar.

(f) Finnið tíðni smárra sveiflna agnarinnar þegar $d\phi/dt = 0$.

English: Particle with mass m moves on a frictionless surface described with the equation

$$z = z_0 \ln\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1\right\}, \qquad a, z_0 > 0$$

in polar coordinates, (r, ϕ, z).

(a) Find the kinetic and the potential energy of the particle.

(b) What coordinates are convenient to use as generalized coordinates?

(c) Find the Lagrangian for the particle.

(d) Is one of the coordinates cyclic?

(e) Find the equations of motion for the particle.

(f) Find the frequency of small oscillations for the particle if $d\phi/dt = 0$.

2. **Íslenska**: Tveir massar, m og M, með staðsetningar x_1 og x_2 víxlverkast. Kerfinu má lýsa með hreyfi- og stöðuorkuföllunum:

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}_1^2 + M\dot{x}_2^2\right), \quad U = \frac{k}{2}\left(2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2\right).$$

   (a) Finnið tíðnir smárra sveiflna kerfisins.

   (b) Hverjir eru normalsveifluhættir kerfisins?

   (c) Lýsið normalsveifluháttunum.

   (d) Finnið tímaháðu lausnirnar $x_1(t)$ og $x_2(t)$ fyrir upphafsgildin $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = 0$, og $\dot{x}_2(0) = 0$.

English:Two masses, m and M, with coordinates x_1 and x_2 interact. The system can be described by the kinetic and the potential energies as:

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}_1^2 + M\dot{x}_2^2\right), \quad U = \frac{k}{2}\left(2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2\right).$$

   (a) Find the frequencies of small oscillations in the system.

   (b) What are the normal modes of oscillations?

   (c) Describe the normal modes.

   (d) Find the time dependent solutions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ for the initial conditions $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = 0$, and $\dot{x}_2(0) = 0$.

3. **Íslenska**: Ögn með massa m hreyfist í einni vídd í mættinu

$$U(x) = U_0 \, \frac{x}{a} \exp\left\{ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right\}, \qquad U_0, a > 0.$$

Finnið ferli agnarinnar í fasarúminu $(x, \dot{x})$ fyrir $E/U_0 > -1$, þar sem E er heildarorka agnarinnar.

English: Particle with mass m moves in the one dimension in the potential

$$U(x) = U_0 \, \frac{x}{a} \exp\left\{ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right\}, \qquad U_0, a > 0.$$

Find the trajectories of the particle in the phase space $(x, \dot{x})$ for $E/U_0 > -1$, where E is the total energy of the particle.

4. **Íslenska**: Ögn með massa m hreyfist í einni vídd í mættinu

$$U(x) = U_0 \, \frac{x}{a} \exp\left\{ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right\}, \qquad U_0, a > 0.$$

(a) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.

(b) Finnið fall Hamiltons fyrir ögnina.

(c) Finnið hreyfijöfnur Hamiltons fyrir ögnina.

(d) Eru til jafnvægispunktar í mættinu sem ögnin gæti sveiflast um með smáum sveiflum?

(e) Finnið tíðni smárra sveiflna agnarinnar um jafnvægispunkta hennar.

English: Particle with mass m moves in one dimension in the potential

$$U(x) = U_0 \, \frac{x}{a} \exp\left\{ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \right\}, \qquad U_0, a > 0.$$

(a) Find the Lagrangian of the particle.

(b) Find the Hamiltonian of the particle.

(c) Find the Hamiltonian equations of motion for the particle.

(d) Are there equilibrium points in the potential around which the particle could maintain small oscillations?

(e) Find the frequency of small oscillations around the equilibrium points of the potential.

5. **Íslenska**: Massi M á alhálli láréttri sléttu er festur í gorm með krafstuðuli k. Gormurinn með jafnvægislengd L er festur í annan endann í upphafspunkti hnitakerfisins $\mathbf{0}$. Massinn og gormurinn snúast með fastri hornferð ω í sléttunni.

   (a) Finnið hreyfirorkuna T og mættisorkuna U fyrir kerfið.

   (b) Hvaða alhnit eru handhæg til að lýsa hreyfingum kerfisins?

   (c) Finnið fall Lagrange og hreyfijöfnur hans.

   (d) Finnið tíðni smárra útþáttarsveiflna kerfisins.

   English: Mass M lies on a horizontal frictionless plane. It is fixed to a spring of equilibrium length L. The other end of the spring is fixed to the origin of the coordinate system $\mathbf{0}$. The mass and the spring rotate with a fixed angular speed ω in the plane.

   (a) Find the kinetic T and the potential energy U of the system.

   (b) What generalized coordinates are conventient to describe the motion of the system?

   (c) Find the frequency of small radial oscillations of the system.