

EÐL302G Afifræði

Föstudaginn 20. maí 2016, kl. 09:00-12:00.
Sjúkra- og endurtökupróf. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og vasareiknivél.

Í prófinu eru 7 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fimm þeirra. Þrjú verkefnanna eru kunnuleg. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Ögn með massa m er þvinguð til að hreyfast í yfirborði sívalnings skilgreindu með $x^2 + y^2 = R^2$, þar sem R er geisli hans. Miðja sívalningsins liggur í miðju hnitakerfisins. Á ögnina verkar kraftur með stefnu að miðju hnitakerfisins og styrk í réttu hlutfalli við fjarlægð hennar frá miðjunni: $\mathbf{F} = -kr$.
 - (a) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.
 - (b) Finnið hreyfijöfnur agnarinnar.
 - (c) Lýsið hreyfingum agnarinnar.
 - (d) Leiðið út fall Hamiltons fyrir kerfið.

English: A particle with mass m is constrained to move on the surface of a cylinder defined by $x^2 + y^2 = R^2$, where R is the radius of the cylinder. The center of the cylinder coincides with the center of the coordinate system. The particle is subject to a force directed to the center and proportional to the distance of the particle: $\mathbf{F} = -kr$.

- (a) Find the Lagrangian for the particle.
- (b) Derive the equations of motion for the particle.
- (c) Describe the motion of the particle.
- (d) Derive the Hamiltonian for the system.

2. **Íslenska:** Vélar- og segllausum bát er sleppt á kyrru vatni með upphafsferð v_0 . Á bátinn verkar viðnámskraftur $F = -F_0 \exp(+\beta v)$.

- (a) Finnið $v(t)$.
- (b) Hversu langt kemst báturinn?
- (c) Hve langan tíma tekur ferðin?

English: A boat without a motor and sails is released on a still pond with initial speed v_0 . The frictional force $F = -F_0 \exp(+\beta v)$ opposes the motion of the boat.

- (a) Find $v(t)$.
- (b) How far does the boat get?
- (c) How long time does the trip take?

3. **Íslenska:** Einsleit stöng með lengd b stendur upp á endann á hrjúfu gólfi og veltur um koll. Finnið hornferð stangarinnar þegar hún skellur á gólfíð.

English: A uniform rod of length b stands upright on a rough floor and tips over. Find the angular speed of the rod as it hits the floor.

4. **Íslenska:** Kúla með geisla a og massa m er þvinguð til að velta án skriðs á lægri innri fleti sívalningsskeljar með geisla R .

- (a) Finnið fall Lagrange fyrir kerfið.
- (b) Finnið tíðni smárra sveiflna kúlunnar?

English: A sphere with radius a and mass m is constrained to roll without slipping on the lower half of the inner surface of a hollow cylinder with inside radius R .

- (a) Find the Lagrangian of the system.
- (b) Find the frequency of small oscillations.

5. **Íslenska:** Notið hnikareikning til að sýna að stysta leið milli tveggja punkta í sléttu sé bein lína.

English: Use a variational method to show that the shortest distance between two points in a plane is a straight line.

6. **Íslenska:** Mættisfall einvíðs sveifils er $U(x) = \lambda x^4$. Finnið hreyfijöfnur Hamiltons fyrir kerfið. Hver er aðalmunurinn á þeim og hreyfijöfnunum fundnum frá falli Lagrange?

English: The potential function for a one-dimensional oscillator is $U(x) = \lambda x^4$. Find the Hamiltonian equations of motion for the system. What is the main difference between them and the equations of motions found from the Lagrangian of the oscillator?

7. **Íslenska:** Hlutur er skotið með hraða V_0 í austurátt frá stað á yfirborði norðurhvels jarðar með breidd λ og undir horni α miðað við láréttan flöt. Sýnið að hluturinn hafi ferðast um

$$d = \frac{4V_0^3}{g^2} \omega \sin \lambda \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

þegar hann hittir aftur yfirborð jarðar.

English: A projectile is fired due east from a point on the surface of Earth at a northern latitude λ with a velocity V_0 and an angle of inclination to the horizontal of α . Show that the lateral deflection when the projectile strikes Earth is

$$d = \frac{4V_0^3}{g^2} \omega \sin \lambda \sin^2 \alpha \cos \alpha$$