

EÐL302G Afifræði

Sjúkrapróf, janúar 2019.
Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og vasareiknivél.

Í prófinu eru 7 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fimm þeirra. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Einsleitur diskur með geisla R og massa M veltur á láréttu yfirborði án þess renna til. Aðdráttarkraftur verkar milli massamiðju disksins og punkts P í fjarlægð d fyrir neðan yfirborðið. Krafturinn er í réttu hlutfalli við fjarlægðina milli massamiðju disksins og P . Finnið tíðni sveifna kerfisins um jafnvægispunktinn.

English: Homogeneous disk of radius R and mass M rolls on a horizontal plane without slipping. Attractive force is between the center of mass of the disk and a point P a distance d below the plane. The force is proportional to the distance between the center of mass of the disk and the point P . Find the frequency of oscillations around the equilibrium of the system.

2. **Íslenska:** Á samhverfan hlut á hreyfingu verka hvorki ytri kraftar né vægi. Samhverfuás hlutarins er x_3 og hverfiþungi hans \mathbf{L} er samsíða x'_3 . Hornið milli $\boldsymbol{\omega}$ og x_3 er α . Upphaflega eru \mathbf{L} og $\boldsymbol{\omega}$ í x_2 - x_3 -sléttunni. Finnið hornhraða samhverfuásins um \mathbf{L} sem fall af I_1 , I_3 , $\boldsymbol{\omega}$ og α .

English: A moving symmetric body is not acted on by external forces or torques. The symmetry axis of the body is x_3 and its angular momentum is parallel to x'_3 . The angle between $\boldsymbol{\omega}$ and x_3 is α . Originally, \mathbf{L} and $\boldsymbol{\omega}$ are in the x_2 - x_3 -plane. Find the angular velocity of the axis of symmetry around \mathbf{L} expressed in terms of I_1 , I_3 , $\boldsymbol{\omega}$, and α .

3. **Íslenska:** Tveir massar, m_1 og m_2 , verka á hvorn annan með þyngdarkrafti. Þeim er sleppt úr kyrrstöðu með fjarlægðina r_0 milli þeirra. Finnið hraða massanna fyrir $r < r_0$ áður en þeir skella saman.

English: Two masses, m_1 og m_2 , act on each other with a gravitational force. They are released from rest with the distance r_0 between them. Find their velocities for $r < r_0$ before they collide.

4. **Íslenska:** Athugum einfaldan einvíðan hreintóna sveifil. Reiknið tímameðaltöl hreyfi- og stöðuorku hans yfir eina sveiflu og sýnið að þau leiða til sömu niðurstöðu, þ. e. $\langle T \rangle_t = \langle U \rangle_t$. Reiknið síðan staðar meðaltöl þessara stærða yfir eina sveiflu og sýnið að þau verði mismunandi, $\langle T \rangle_x \neq \langle U \rangle_x$. Hvers vegna?

English: Consider a simple one-dimensional harmonic oscillator. Calculate the temporal averages of the kinetic and potential energies over one oscillation and show they lead to the same result, i. e. $\langle T \rangle_t = \langle U \rangle_t$. Calculate then the spatial averages of these quantities over one period and show that they do not agree, $\langle T \rangle_x \neq \langle U \rangle_x$. Why?

5. **Íslenska:** Á ögn á einvíðri hreyfingu verkar krafturinn

$$F(x, t) = \frac{k}{x^3} \exp(-t/\tau),$$

þar sem k og τ eru jákvæðir fastar. Finnið föll Lagrange og Hamiltons fyrir ögnina. Berið saman fall Hamiltons og heildarorku kerfisins og athugið orkuvarðveislu í kerfinu.

English: On a particle moving in one dimension acts the force

$$F(x, t) = \frac{k}{x^3} \exp(-t/\tau),$$

where k and τ are positive constants. Find the Lagrangian and the Hamiltonian functions for the particle. Compare the total energy and the Hamiltonian function and discuss energy conservation in the system.

6. **Íslenska:** Bolta er hent beint upp í loft með upphafsferð v_0 í föstu þyngdarsviði. Hve hátt kemst hann ef viðnámskraftur $F = kv^2$ verkar á móti hreyfingunni? Finnið markgildið á hæðinni fyrir hverfandi viðnámskraft.

English: A ball is thrown straight up into the air with initial speed v_0 in a constant gravitation field. How high does it get if the motion is counteracted by a force of resistance $F = kv^2$? Find the limit of the height with vanishing resistive force.

7. **Íslenska:** Vatnsfötu er snúið um samhverfuás. Finnið lögun vatnsyfirborðsins í fötunni.

English: A bucket of water is spinning around its axis of symmetry. Find the shape of the water surface in the bucket.