Háskóli Íslands
Raunvísindadeild
Námsbraut í eðlisfræði

EÐL302G Aflfræði

Mánudaginn 14. desember 2020, kl. 09:00-12:00.
Lokapróf. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, tölvur, öll prentuð og skrifuð gögn á pappír eða rafrænum ham, vafrar, vasareiknivélar, algebru- og grafíkforrit.

Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fjögur þeirra. Skrifið skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefnin eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

- Nemandi má ekki þiggja aðstoð frá öðrum en kennara námskeiðsins.
- Nemendur mega koma með fyrirspurnir á tölvupóstfangið `vidar@hi.is`.
- Ekki má sýna neinum prófverkefnið eða dreifa því meðan á prófinu stendur.
- Nemendur mega ekki hafa neitt samband sín á milli meðan á prófinu stendur.
- Aðeins má nota þau hjálpargögn sem tiltekin eru á prófblaði.
- Ef úrlausn er ekki skilað þá fær nemandi falleinkunn.

Ég geri mér grein fyrir því að kennari hefur fullan rétt til þess að fresta einkunnargjöf um óákveðinn tíma og krefja mig skýringa á úrlausn minni síðar, ef hann grunar að ég hafi ekki fylgt reglum um próftöku.

Ég skil að brot á reglum Háskóla Íslands getur haft í för með sér þung viðurlög eins og fall í námskeiði, en einnig áminningu eða brottvikningu úr skóla, tímabundið eða fyrir fullt og allt.

Kennari treystir nemanda til þess að fylgja öllum reglum, vanda úrlausn sína, leggja sig allan fram og láta sér ekki til hugar koma að svindla á prófinu. Með skil á úrlausn undirgengst nemandi þessi skilyrði.

1. **Íslenska**: Ögn með massa m hreyfist í tvívíðri sléttu í mættinu

$$U(x,y) = U_0 \left(\frac{xy}{a^2}\right)^2,$$

þar sem a er fasti með víddina lengd, ($[a] = L$).

(a) Finnið heppileg alhnit fyrir ögnina.

(b) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.

(c) Finnið hreyfijöfnur kerfisins.

(d) Er hverfiþungi agnarinnar varðveittur? Rökstyðjið svarið.

(e) Finnið fall Hamiltons fyrir ögnina.

(f) Finnið hreyfijöfnur Hamiltons fyrir ögnina.

(g) Er orka agnarinnar varðveitt?

(h) Hversu langt frá miðju $U(x,y)$ kemst ögn lengst með heildarorku $E_T > 0$ og hver þurfa upphafsskilyrðin þá að vera?

English: Particle with mass m moves in a two-dimensional plane in the potential

$$U(x,y) = U_0 \left(\frac{xy}{a^2}\right)^2,$$

where a is a constant with the dimension length, ($[a] = L$).

(a) Find convenient generalized coordinates for the particle.

(b) Find the Lagrangian for the particle.

(c) Find the equations of motion for the particle.

(d) Is the angular momentum of the particle conserved?

(e) Find the Hamiltonian for the particle.

(f) Find the Hamiltonian equations of motion for the particle.

(g) Is the energy of the particle conserved?

(h) How far from the center of $U(x,y)$ can a particle with total energy $E_T > 0$ travel, and which initital conditions are then needed?

2. **Íslenska**: Ögn með fastan hverfiþunga hreyfist í miðlægu mætti eftir braut sem lýst er með fallinu $r = a\theta^2$, þar sem a er fasti með víddina lengd.

   (a) Finnið kraft sem gæti leitt til þessarar brautar.

   (b) Hvaða mætti gefur þennan kraft?

   English: A particle with constant angular momentum moves in a central potential along an orbit described by the function $r = a\theta^2$, where a is a constant with the dimension length.

   (a) Find a force that can support this kind of motion.

   (b) What potential gives this force?

3. **Íslenska**: Í einni vídd hreyfist ögn í mættinu

$$U_0 \ln \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right\},$$

þar sem a er jákvæður fasti með víddina lengd.

(a) Finnið mögulega jafnvægispunkta sem ögnin gæti sveiflast um með litlu útslagi.

(b) Hver er tíðni smárra sveiflna um þessa punkta?

(c) Finnið fall Hamiltons fyrir ögnina.

English: A particles moves in one dimension in the potential

$$U_0 \ln \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right\},$$

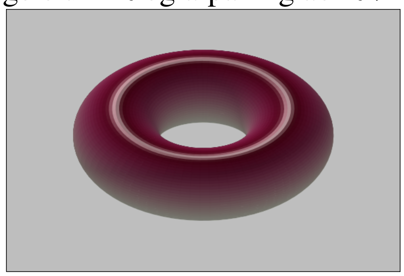
where a is a positive constant with the dimension length.

(a) Locate possible points of equilibrium that the partcle could oscillate around with small amplitude.

(b) What is the frequency of small oscillations around these points?

(c) Calculate the Hamiltonian for the particle.

4. **Íslenska**: Í haust komumst við að því að fyrir kleinuhring með jafndreifðum massa M og tveimur geislum R og a þannig að $R > a$



fæst hverfitregðuþinurinn **I** með stök

$$I_{11} = I_{22} = M\left(\frac{5a^2}{8} + \frac{R^2}{2}\right), \quad I_{33} = M\left(\frac{3a^2}{4} + R^2\right), \quad I_{ij} = 0 \text{ ef } i \neq j,$$

þegar notað er kartíska hnitakerfið sem fellur saman við samhverfuása kleinuhringsins, $\hat{e}_3$ þvert á láréttan flöt hans (í gegnum mitt gatið), og hornréttu ásana $\hat{e}_1$ og $\hat{e}_2$ í láréttu sléttunni þvert á $\hat{e}_3$. Nú er kleinuhringurinn settur á jafna snúningsferð ω um ás sem liggur í $\hat{e}_3$ - $\hat{e}_2$ sléttunni þannig að hornið milli $\hat{e}_3$ og $\boldsymbol{\omega}$ er θ.

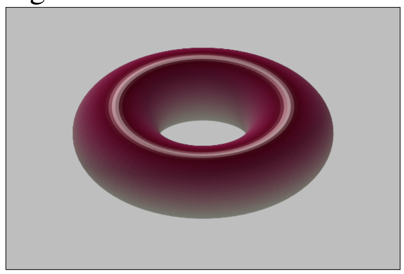
(a) Finnið hverfiþunga kleinuhringsins **L**.

(b) Finnið hreyfiorku hans.

(c) Þarf ytra vægi til að viðhalda þessum snúningi? Ef svo er, finnið það og skýrið.

(d) Hreyfiorkuna í snúningi höfum við skrifað sem $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, en við ættum heldur að skrifa $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, þar sem $\boldsymbol{\omega}^T$ er línuvigur og $\boldsymbol{\omega}$ er dálkvigur. Hávísirinn T stendur fyrir byltuaðgerðina. Hreyfiorkan T er skalarstærð, hvernig getum við sýnt að hún sé óbreytt óháð því hvernig hornrétta hnitakerfi hlutarins er snúið?

English: This fall we found out that a toroid with a mass M and a homogeneous mass distribution having the two radia R and a such that $R > a$



has a moment of inertia tensor with elements

$$I_{11} = I_{22} = M\left(\frac{5a^2}{8} + \frac{R^2}{2}\right), \quad I_{33} = M\left(\frac{3a^2}{4} + R^2\right), \quad I_{ij} = 0 \text{ ef } i \neq j,$$

when a cartesian coorbinate system aligned with the symmetry axes of the toroid is used with $\hat{\mathrm{e}}_3$ perpendicular to its horizontal plane (through the central hole), and the orthogonal axes $\hat{\mathrm{e}}_1$ and $\hat{\mathrm{e}}_2$ in the horizontal plane. Now the toroid is set on constant rotation ω around an axis lying in the $\hat{\mathrm{e}}_3$ - $\hat{\mathrm{e}}_2$ plane, such that the angle between $\hat{\mathrm{e}}_3$ and $\boldsymbol{\omega}$ is θ.

(a) Find the angular momentum of the toroid $\mathbf{L}$.

(b) Find its kinetic energy.

(c) Is external torque needed to maintain this rotation? If so, find it and describe it.

(d) We have written the kinecti energy of rotation as $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, but we should rather have used $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, with the line vector $\boldsymbol{\omega}^T$. Then $\boldsymbol{\omega}$ is a column vector. The superscript T indicates the transpose operation. The kinetic energy T is a scalar quantity, how can we show that it is independent of the orientation of the orthogonal coordinate system used to calculate it in?

5. **Íslenska**: Tveir massar, m_1 og m_2, með staðsetningar x_1 og x_2 víxlverkast. Kerfinu má lýsa með hreyfi- og stöðuorkuföllunum:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right), \quad U = \frac{k}{2}\left(13x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2\right).$$

   (a) Finnið tíðnir smárra sveiflna kerfisins.

   (b) Hverjir eru normalsveifluhættir kerfisins?

   (c) Lýsið normalsveifluháttunum.

   (d) Finnið tímaháðu lausnirnar $x_1(t)$ og $x_2(t)$ fyrir upphafsgildin $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$, og $\dot{x}_2(0) = 0$.

   English: Two masses, m_1 and m_2, with coordinates x_1 and x_2 interact. The system can be described by the kinetic and the potential energies as:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right), \quad U = \frac{k}{2}\left(13x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2\right).$$

   (a) Find the frequencies of small oscillations in the system.

   (b) What are the normal modes of oscillations?

   (c) Describe the normal modes.

   (d) Find the time dependent solutions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ for the initial conditions $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$, and $\dot{x}_2(0) = 0$.