

EÐL302G Afifræði

Fimmtudaginn 12. desember 2019, kl. 13:30-16:30.

Lokapróf. Kennari: Viðar Guðmundsson.

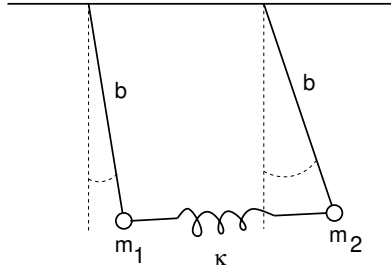
Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, öll prentuð og skrifuð gögn og vasareiknivél.

Í prófinu eru 5 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fjögur þeirra. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Ögn með massa m hreyfir sig á einvíða bilinu $0 \leq x < \infty$ í kraftsviði sem best er lýst með stöðuorku hennar sem $U(x) = U_0 \exp(-kx)$, þar sem U_0 og k eru jákvæðir fastar með tilheyrandi víddir. Á tímanum $t = 0$ er ögnin kyrrstæð í punktinum $x = 0$. Hve langan tíma tekur hana að komast í punktinn $x = x_0$?

English: A particle with mass m moves in the one-dimensional interval $0 \leq x < \infty$ in a force field that is best described by its potential energy $U(x) = U_0 \exp(-kx)$, where U_0 and k are positive constants with the appropriate dimensions. At time $t = 0$ the particle is motionless in the point $x = 0$. How long time does it take to reach the point $x = x_0$?

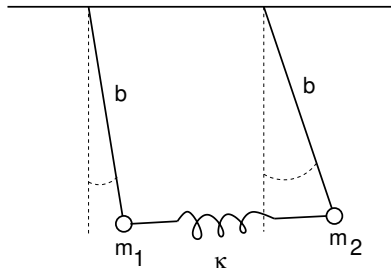
2. **Íslenska:** Tveir pendúlar með sömu lengd b en mismunandi mössum m_1 og m_2 í þyngdarsviði tengjast með gormi eins og myndin sýnir. Pendúlarnir sveiflast aðeins í sléttu teikningarinnar.



Gormurinn fylgir lögmáli Hooks og kerfinu er komið fyrir í lofttæmi.

- Finnið hreyfi- og stöðuorku kerfisins án nálgunar fyrir smáar sveiflur.
- Nálgið hreyfi- og stöðuorku kerfisins fyrir smáar sveiflur.
- Finnið tíðni normalsveifluháttanna kerfisins fyrir smáar.
- Sýnið að eigintíðni sveifluháttanna hafi rétt markgildi þegar $m_1 = m_2$.

English: Two parallel-coupled plane pendula with same length b but different masses m_1 og m_2 oscillate in a gravitational field as the figure shows.



The spring obeys Hook's law and the system is placed in a vacuum.

- Find the kinetic and potential energies of the system without an approximation for small oscillations.
- Make an approximation for the kinetic and potential energies of the system for the case of small oscillations.
- Find the frequencies of the normal modes of oscillations for the system.
- Show that the eigenfrequencies of the system have the correct limit for $m_1 = m_2$.

3. **Íslenska:** Um hverfitregðu stjarns hlutar um höfuðása hans gildir $I_3 > I_2 = I_1$. Klukkan $t = 0$ er hluturinn settur á snúning þannig að $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3$, þar sem $\lambda, \mu \ll \omega_1$, og \hat{e}_i eru einingarvigrar í hnitakerfi hlutarins í stefnu höfuðásanna. Engir kraftar eða vægi verka á hlutinn þegar $t > 0$. Notið jöfnur Eulers til að lýsa snúningi hlutarins skömmu eftir $t = 0$. Lýsið niðurstöðunum einnig með orðum.

English: A rigid body has moments of inertia along its principal axes $I_3 > I_2 = I_1$. At time $t = 0$ the body is set into rotation such that $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3$, where $\lambda, \mu \ll \omega_1$, and \hat{e}_i are unit vectors in the body fixed system oriented along its principal axes. No force or moments act on the body for $t > 0$. Use the equations of Euler to describe the rotation of the body for times shortly after $t = 0$. Describe the results in words.

4. **Íslenska:** Á hringlaga grannri gjörð með massa M og geisla R rennur án viðnáms perla með massa m . Gjörðin er hengd upp í einum punkti í þyngdarsviði þannig að hún getur sveiflast frjálst í fleti sínum.

- Finnið stöðuorku, hreyfiorku og fall Lagrange fyrir kerfið með nálgun fyrir smáar sveiflur.
- Finnið hreyfijöfnur kerfisins. Hve mörg alhnit þarf til að lýsa því?
- Finnið alskriðþunga kerfisins.
- Finnið fall Hamiltons fyrir kerfið og hreyfijöfnur þess leiddar út frá því. Munið að fall Hamiltons er fall af alhnitum og alskriðþungum kerfisins.

English: On a circular thin hoop with mass M a small bead with mass m slides without a friction. The hoop is hanged up at one point so it can oscillate freely in its own plane.

- Find the potential energy, the kinetic energy, and the Lagrangian of the system using an approximation for small oscillations.
- Derive the equations of motion for the system. How many generalized coordinates are needed to describe it?
- Find the generalized momenta of the system.
- Derive the Hamiltonian describing the system, and the equations of motion from the canonical equations.

5. **Íslenska:** Ögn með massa m í tvívíðum heimi hreyfist í miðlægu þyngdarmætti þannig að stöðuorku hennar í pólhnitum er $U(r) = U_0 \ln(r/r_0)$, þar sem U_0 og r_0 eru jákvæðir fastar.

- (a) Hvert er virka mættið fyrir ögnina?
- (b) Finnið fall Lagrange fyrir ögnina.
- (c) Eru einhver alhnit rásuð?
- (d) Finnið geisla stöðugrar hringbrautar.
- (e) Eru til efri mörk hverfiþunga agnarinnar á stöðugri hringbraut í þessu mætti?
- (f) Finnið hreyfijöfnu agnarinnar.
- (g) Finnið tíðni smárra sveiflna um jafnvægisfjarlægðina.
- (h) Hvað er á annan hátt hér, en í þrívíðum heimi?

English: A particle of mass m in a two-dimensional universe moves around in a central gravity potential such that its potential energy in polar coordinates is $U(r) = U_0 \ln(r/r_0)$, where U_0 and r_0 are positive constants.

- (a) Find the effective potential for the particle.
- (b) Find the Lagrangian for the particle.
- (c) Are some of the generalized coordinates cyclic?
- (d) Find the radius of a stable circular orbit.
- (e) Is there an upper limit for the angular momentum of a particle in a stable circular orbit in this potential?
- (f) Find the equation of motion for the particle.
- (g) Find the frequency of small oscillations around the equilibrium of the circular orbit.
- (h) What is different here from a three-dimensional universe?