

EÐL302G Afifræði

Fimmtudaginn 13. desember 2018, kl. 09:00-12:00.
Lokapróf. Kennari: Viðar Guðmundsson.

Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og vasareiknivél.

Í prófinu eru 7 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fimm þeirra. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Massi m hangir í lóðréttum gormi með kraftstuðuli κ . Gormurinn er hengdur upp í föstum punkti P . Annar eins massi hangir í eins gormi sem festur er í fyrri massann. Heppilegast er að mæla stöðu efri massans sem x_1 niður á við frá jafnvægisstöðu hans, og skilgreina samskonar hnit x_2 fyrir neðri massann miðað við jafnvægisstöðu hans.
 - (a) Finnið hreyfijöfnur kerfisins fyrir lóðréttar einvíðar sveiflur.
 - (b) Reiknið eigintíðni sveiflanna.
 - (c) Lýsið eiginsveifluháttunum.
 - (d) Berið eigintíðnirnar saman við þær sem fást þegar öðrum massanum er haldið föstum.

English: Mass m is suspended vertically attached to a spring with force coefficient κ . The spring is fixed to an immobile point P . Another identical mass and spring system is attached to the first mass. It is convenient to measure the displacement of the upper mass as x_1 downwards from its equilibrium position, and define similarly x_2 as the position of the second mass compared to its equilibrium position.

- (a) Find the equations of motion for the one-dimensional vertical oscillations of the system.
- (b) Calculate the eigenfrequencies of the system.
- (c) Describe the eigenmodes of oscillations.
- (d) Compare the eigenfrequencies to the frequencies obtained by holding one of the masses fixed.

2. **Íslenska:** Ögn með massa m hreyfist í einvíðu stöðuorkufalli

$$U(x) = U_0 \left\{ 2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right\},$$

þar sem U_0 og a eru jákvæðir fastar.

- Finnið kraftinn á ögnina.
- Rissið upp af $U(x)$ og finnið stöðuga og óstöðuga jafnvægispunkta.
- Metið tíðni sveiflna um stöðuga jafnvægispunkta.
- Hver er minnsti hraðinn sem ögnin þarf til að sleppa úr kyrrstöðu í miðju hnitakerfisins út í buskann?
- Klukkan $t = 0$ er ögnin stödd í miðju hnitakerfisins með þennan minnsta sleppihraða. Finnið stöðu hennar sem fall af tíma $x(t)$.
- Hve langan tíma tekur hana að sleppa?

English: A particle with mass m moves in a one-dimensional potential energy

$$U(x) = U_0 \left\{ 2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right\},$$

with the positive constants U_0 and a .

- Find the force acting on the particle.
- Sketch $U(x)$ and locate stable and unstable points of equilibrium.
- Estimate the frequency of oscillations of the particle around the stable points of equilibrium.
- What is the lowest possible speed needed for the particle to escape with from the center of the coordinate system to infinity?
- At time $t = 0$ the particle is located in the center of the coordinate system with this lowest escape speed. Find its location as function of time $x(t)$.
- How long time does it need to escape to infinity?

3. **Íslenska:** Gerum ráð fyrir engu loftviðnámi. Ögn er skotið beint upp í loftið upp í hæð h . Reiknið hnikun landingarpunkts agnarinnar frá upphafspunkti hennar vegna krafts Coriolis á norðurhveli jarðar. Hvað gerist á suðurhveli? Hvers vegna? Gerum ráð fyrir að h sé lítil hæð miðað við geisla jarðar.

English: Assume no air resistance. The particle is projected vertically into the air to height h . Calculate the deviation of the landing place of the particle from its launching place due to the Coriolis force in the Northern Hemisphere of the Earth. What happens in the Southern Hemisphere? Why? Assume h to be small compared to the radius of the Earth.

4. **Íslenska:** Ögn með massa m rennur án núnings í föstu þyngdarsviði niður gormferil lýstum í sívalninghnitum með $z = k\theta$, $r = b$, þar sem b og k eru fastar.

(a) Finnið fall Lagrange fyrir kerfið og leiðið út hreyfijöfnur agnarinnar.

(b) Finnið fall Hamiltons fyrir kerfið og leiðið út hreyfijöfnur agnarinnar.

English: A particle with mass m in constant gravitational field slides without a friction down a helix described in cylindrical coordinates with $z = k\theta$, $r = b$, where b and k are constants.

(a) Find the Lagrangian function for the system and the equations of motion of the particle.

(b) Find the Hamiltonian function for the system and the equations of motion of the particle.

5. **Íslenska:** Ögn hreyfist í miðlægu kraftsviði $F(r) = -k/r^3$. Finnið hreyfijöfnu agnarinnar og þrenns konar mismunandi lausnir á henni. Lýsið þessum lausnum og athugið hvort stöðugar hringbrautir séu mögulegar í þessu kraftsviði.

English: A particle moves in the central force field $F(r) = -k/r^3$. Find an equation of motion for the particle and three possible different solutions to it. Describe the solutions and check whether stable circular orbits are possible in this force field.

6. **Íslenska:** Ögn með massa m ferðast í einvídd í vökva þar sem aðeins viðnámskrafturinn $F = mk\sqrt{v}$ verkar gegn hreyfingu hennar. Setið fram hreyfijöfnu fyrir ögnina. Finnið hraða hennar og staðsetningu sem fall af tíma ef upphafshraði hennar er v_0 . Hve langt kemst hún? Notið liðun Taylors til að kanna lausnina fyrir „lítið“ t og túlkið niðurstöðuna.

English: A particle with mass m in travels in one dimension through a liquid where the only force acting on it is $F = mk\sqrt{v}$ counteracting its motion. Write down an equation of motion for the particle. Find its velocity and location as functions of time if its initial speed is v_0 . How far does it get? Use a Taylor series to explore the solution for “small” t and interpret the result.

7. **Íslenska:** Sveifill er gerður úr massa m sem hengur er í annan enda massalauss gorms með kraftstuðul k . Hinn endi gormsins er hengdur upp í fastan punkt og jafnvægis lengd hans með massanum er b í föstu þyngdarsviði. Finnið fall Lagrange fyrir sveifilinn og hreyfijöfnur hans. Eru hreyfijöfnurnar línulegar?

English: Oscillator is made from a mass m attached to one end of a massless spring with force constant k . The other end of the spring is fixed to a point. The equilibrium length of the suspended spring with the attached mass in a constant gravitational field is b . Find the Lagrangian for the oscillator and its equations of motion. Are the equations of motion linear?