

## EÐL302G Afifræði

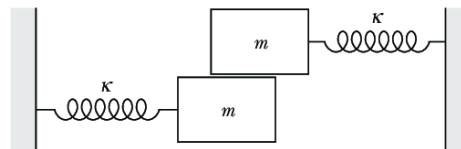
Föstudaginn 11. desember 2015, kl. 09:00-12:00.

Lokapróf. Kennari: Viðar Guðmundsson.

### Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og vasareiknivél.

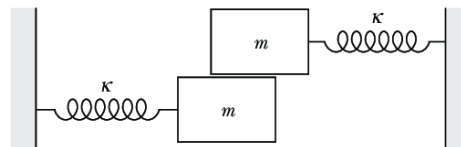
Í prófinu eru 7 verkefni sem öll vega jafnt. Leysa þarf fimm þeirra. Þrjú verkefnanna eru kunnuleg. Skrifðu skýrt og greinilega allar útleiðslur með hnitmiðuðum stuttum skýringum þar sem það á við. Öll verkefni eru lögð fyrir á íslensku og ensku.

1. **Íslenska:** Tveimur sams konar hreintóna sveiflum er þannig fyrir komið að massar þeirra núast saman eins og myndin sýnir.



Viðnámskrafturinn leiðir til víxlverkunar sem er línulega háð innbyrðis augnablikshraða massanna. Greinið tengdar sveiflur kerfisins.

**English:** Two identical harmonic oscillators are placed such that their masses slide against each other as is shown in the figure.



The interaction of the two oscillators through the frictional force depends linearly on their relative instantaneous velocity. Analyze the the coupled oscillations of the system.

2. **Íslenska:** Þunnur diskur er settur saman úr tveimur einsleitum helmingum. Annar þeirra er með massaþéttleika á flatareiningu  $\rho$ , en hinn með  $2\rho$ . Finnið fall Lagrange sem lýsir veltu disksins án skriks eftir láréttu yfirborði. Finnið hreyfijöfnuna.

**English:** A thin disk is made of two homogeneous halves. One with the mass density per area  $\rho$ , while the other one has  $2\rho$ . Find the Lagrange function for the disk rolling without slipping along a horizontal surface. Find the equation of motion.

3. **Íslenska:** Pendúll er settur saman úr massa  $M$  og massalausum gormi með lengd  $b$  þegar ekki er teygt á honum. Kraftstuðull gormsins er  $k$ . Finnið heppileg alhnit, fall Lagrange og hreyfijöfnur kerfisins.

**English:** A pendulum is made of a mass  $M$  and a massless spring with length  $b$  when not extended. The spring constant is  $k$ . Find appropriate generalized coordinates, the Lagrangian, and the equations of motion for the system.

4. **Íslenska:** Ögn getur ferðast lárétt í gegnum þunnt efni þar sem viðnámskraftur móti hreyfingunni er  $F = -\gamma v^3$ . Ögnin er send af stað með  $v_0$  klukkan  $t = 0$  frá punkti  $x = 0$ . Finnið ferð hennar sem fall af  $t$ . Finnið staðsetningu hennar sem fall af  $t$ . Notið víddargreiningu til að kanna hvort  $v(t)$  og  $x(t)$  hafi rétta vídd.

**English:** A particle can travel horizontally through a thin material with a retarding force  $F = -\gamma v^3$ . The particle is set into motion with  $v_0$  at time  $t = 0$  at location  $x = 0$ . Find its speed as a function of  $t$ . Find its position as a function of  $t$ . Use dimensional analysis to explore if  $v(t)$  and  $x(t)$  have the correct dimensions.

5. **Íslenska:** Finnið hverfitregðupin einsleits sívalnings með massa  $M$ , hæð  $h$  og geisla botnflatar  $a$ . Þægilegt er að miða hnitakerfið við miðpunkt sívalningsins.

**English:** Find the moments of inertia tensor for a solid homogeneous cylinder with mass  $M$ , height  $h$ , and base radius  $a$ . It is convenient to place the origin of the coordinate system in the center of the cylinder.

6. **Íslenska:** Krafturinn  $F = -mk^2/x^3$  verkar á kyrrstæða ögn með massa  $m$ , þar sem  $k$  er fasti.

(a) Finnið stöðuorku agnarinnar í þessu miðlæga kraftsviði.

(b) Finnið tímann sem tæki ögnina að falla úr fjarlægð  $d$  að kraftmiðjunni.

**English:** The force  $F = -mk^2/x^3$  acts on a stationary particle with mass  $m$ , where  $k$  a constant.

(a) Find the potential energy of the particle in this central force field.

(b) Find the time it would take for the particle to fall from the distance  $d$  to the center of the force field.

7. **Íslenska:** Staðsetningu massa  $m$  í kúlupendúli má ákvarða nákvæmlega með hornunum  $\theta$  og  $\phi$  í kúluhnitakerfi og armlengd hans  $b$ . Við gerum ráð fyrir að armur hans sé massalaus og ritum fall Lagrange fyrir pendúlinn í þyngdarsviði sem

$$L = \frac{m}{2}(b\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2}(b \sin \theta \dot{\phi})^2 - mgb \cos \theta.$$

(a) Finnið hreyfijöfnurnar með því að nota jöfnur Eulers - Lagrange.

(b) Með samanburði við snúðinn eða brautarhreyfingu í miðlægu kraftsviði, er mögulegt að skilgreina virkt mætti í hreyfijöfnunum í (a)-lið?

(c) Finnið kórskriðþunga pendúlsins.

(d) Finnið fall og hreyfijöfnur Hamiltons fyrir pendúlinn.

**English:** The location of the mass  $m$  of a spherical pendulum can be exactly determined with the angles of a spherical coordinate system  $\theta$  og  $\phi$  and the length of its arm  $b$ . We assume its arm to be massless and write the Lagrangian for the pendulum in a gravitational field as

$$L = \frac{m}{2}(b\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2}(b \sin \theta \dot{\phi})^2 - mgb \cos \theta.$$

(a) Find the equations of motion for the pendulum by use of the Euler - Lagrange equations.

(b) By comparison with the spinning top or orbital motion in a central force field, is it possible to identify an effective potential in item (a)?

(c) Find the canonical momenta of the pendulum.

(d) Find the Hamiltonian function and the Hamilton equations of motion for the pendulum.