Tengdar sveiflur, almenn nálgun

n-frelsisgráður, geymið kerfi

alhnit q_k $\quad k = 1, 2, \dots n$

Jafnvægisástand er til:

$$q_k = q_{k0} \quad \text{með}$$

$$\dot{q}_k = 0, \quad \ddot{q}_k = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\Bigg|_0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k}\Bigg|_0 = \frac{\partial T}{\partial q_k}\Bigg|_0 - \frac{\partial U}{\partial q_k}\Bigg|_0 = 0$$

ummyndanir hnita óháð t

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$$

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

því fæst eins og við sáum áður að T er óhliðrað 2. stigs fall af alhröðunum

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_k}\Bigg|_0 = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

og því

$$\frac{\partial U}{\partial q_k}\Bigg|_0 = 0$$

Veljum að alhnitin séu miðuð við jafnvægisstöðuna

$\to q_{k0} = 0$

$$\to U(q_1 \cdots q_n) = \underbrace{U_0}_{\text{veljum 0-punkt þ.a. } U_0 = 0} + \overbrace{\sum_k \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 q_k}^{=0} + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0 q_j q_k + \cdots$$

$$\to U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \quad \text{með} \quad \underbrace{A_{jk} \equiv \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0}_{A \text{ er samhverft í } j \text{ og } k}$$

$U \geq 0$

$T \geq 0$

því fæst

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\,\dot q_j \dot q_k \\ U &= \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}\, q_j q_k \end{aligned}}$$

m þarf ekki að vera hornalínu-fylki

$m_{rs}\dot q_r \dot q_s$ táknar víxlverkun í gegnum hraða

Náum í hreyfijöfnur

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \sum_j A_{jk} q_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} = \sum_j m_{jk} \dot q_j$$

$$\rightarrow \sum_j \left\{ A_{jk} q_j + m_{jk} \ddot q_j \right\} = 0$$

n 2. stigs línulegar tengdar afleiðujöfnur með föstum stuðlum

Gískum á lausn $q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)}$

tveir óákveðnir fastar

Í þessu geymna (lokaða) kerfi getur ω aðeins verið raunstærð $\omega \in \mathbb{R}$

Innsetning getur jöfnuhneppið

$$\boxed{\sum_j \left\{ A_{jk} - \omega^2 m_{jk} \right\} a_j = 0}$$

sem hefur ekki lausn nema ákveðan sé 0, en umritum

$$\boxed{\mathbb{A}\,\bar{a} = \omega^2 \mathbb{M}\,\bar{a}}$$

sem er almenn eigingildisjafna sem má nota til að ákvarða eigingildin ω^2 og eiginvigrana $\bar{a}$ sem lýsa sveifluháttunum

Almenna lausnin er

$$\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}}$$

← þessa saman við almenna lausn á jöfnu Schrödingers

summað yfir alla sveifluhætti

eða

$$\boxed{Re(q_j(t)) = \sum_r a_{jr} \cos\{\omega_r t - \delta_r\}}$$

Eigingildin geta verið margföld, og aftur má nýta eiginvigrana til að útbúa ummyndanir milli upphaflegu alhnitanna og nýju alhnitanna fyrir n-óháða sveiflu

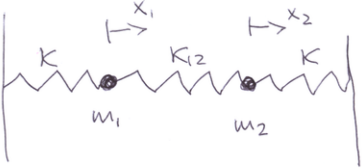
$A\bar{a} = \omega^2 M \bar{a}$ er venjulega ekki leyst sem $(M^{-1}A)\bar{a} = \omega^2\bar{a}$

því samhverfa getur tapast

og andhverfur eru dýrar í reikningum.

Endurtekið dæmi um tvo tengda sveifla

Notum U í stað krafta



$$U = \frac{K}{2}x_1^2 + \frac{K_{12}}{2}(x_2-x_1)^2 + \frac{K}{2}x_2^2$$

$$= \frac{K+K_{12}}{2}x_1^2 + \frac{K+K_{12}}{2}x_2^2 \underbrace{- K_{12}x_1x_2}_{\text{víxlverkunin milli } m_1 \text{ og } m_2}$$

$$A_{11} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0 = K + K_{12}$$

$$A_{22} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0 = K + K_{12}$$

$$A_{12} = A_{21} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0 = -K_{12}$$

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2$$

bera saman við $T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$

$$\rightarrow \quad m_{11} = m_{22} = M$$

$$m_{12} = m_{21} = 0$$

bui fast

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}\bar{a} = \omega^2 \mathbb{M}\bar{a} = \omega^2 M \bar{a}$$

$$\begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \omega^2 M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

og við fáum eins og áður at og tvo eiginvigrar

$$\bar{a}_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\bar{a}_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ og $\mathbb{M}$ eru samhverf raungild jákvætt ákveðin „fylki" (bæði).

Eigingildin eru raungild

Ef við tökum saman eiginvigrana og röðum saman í fylki

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1)_1 & \cdots & (a_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1)_n & \cdots & (a_n)_n \end{pmatrix}$$

þá fæst

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^t \mathbb{M} \Lambda &= \mathbb{1} \\ \Lambda^t \mathbb{A} \Lambda &= \Omega^2 \end{aligned}\right\} \qquad \Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

Ummyndunin Λ hornalínugerir $\mathbb{A}$, en $\Lambda \Lambda^t = \mathbb{M}$

þeir eru ekki hornréttir fyrir almenna eigingildisverkefnið

Eiginhnit ↔ (normal coordinates)

Almenna lausnin var

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\, e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

Síðan sáum við að liðunarstuðlarnir (eiginvigrana) má staðla. Ef við setjum að þeir séu staðlaðir verðum við að bæta við heildarstika fyrir hvern eiginvigur þ.a. hægt sé að uppfylla upphafsskilyrði

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r\, a_{jr}\, e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

Einföldum táknunina

$$q_j(t) = \sum_r \beta_r\, a_{jr}\, e^{i\omega_r t}, \qquad \beta_r = \alpha_r e^{-i\delta_r}$$

Skilgreinum svo

$$\boxed{\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr}\, \eta_r(t)}$$

η_r er stærð sem sveiflast aðeins með einni tíðni ω_r

Lítum á η_r sem ný hnit, eiginhnit

Þau uppfylla jöfnur

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

sem eru n - að tölu, n - óháðar jöfnur fyrir eiginhnitin

Domi (ūtlūdsla ḋveyfijajua fepuir η_r)

$$q_j = \sum_r a_{jr}\,\eta_r \;\longrightarrow\; \dot q_j = \sum_r a_{jr}\,\dot\eta_r$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\,\dot q_j\,\dot q_k = \frac{1}{2}\sum_{jk} m_{jk}\left\{\sum_r a_{jr}\,\dot\eta_r\right\}\left\{\sum_s a_{ks}\,\dot\eta_s\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\left\{\sum_{jk} m_{jk}\,a_{jr}\,a_{ks}\right\}}_{\left(A^t M A = 1\right)_{rs} = \delta_{rs}}\dot\eta_r\,\dot\eta_s = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\dot\eta_r\,\dot\eta_s\,\delta_{rs}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r \dot\eta_r^{\,2}$$

Eins fort

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2}\sum_{r,s} \underbrace{\left\{\sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks}\right\}}_{(\Omega^2)_{rs} = \omega_s^2 \delta_{rs}} \eta_r \eta_s$$

$$\rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\sum_{r,s} \omega_s^2 \eta_r \eta_s \delta_{rs}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r \omega_r^2 \eta_r^2$$

$$\rightarrow \quad L = T - U = \frac{1}{2}\sum_r \left\{\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2\right\}$$

Notwen

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \eta_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_r}\right) = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0}$$

Hvernig er best að leysa eigingildisverkefnið

$$A\bar{a} - \omega^2 M\bar{a} = 0$$

þegar $M \neq \alpha \mathbb{I}$. Erfitt getur reynst að finna Λ þ.a.

$$\Lambda^t M \Lambda = \mathbb{1} \quad \text{og} \quad \Lambda^t A \Lambda = \underline{\Omega}^2$$

Fyrir lítil verkefni má nota aðferðir bókanna tveggja og vinna með

$$\det\{A - \omega^2 M\} = 0$$

Ekki er gott að nota M^{-1} vegna samhverfumissis, en heppilegt er að vinna eftir Cholesky LU-þáttun

L: lægra þríhyrningsfylki, U: efra þríhyrningsfylki

Þetta er aðeins hægt fyrir jákvætt ákveðin fylki, sem $\mathbb{M}$ er því fyrir alla vigra v gildir

$$\boxed{v^T \mathbb{M} v > 0}$$

hreyfiorkan er jákvæð

Finnum þá

$$\mathbb{L}\mathbb{L}^T = \mathbb{M}$$

í raun kvaðratrót $\mathbb{M}$

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}\bar{a} = \omega^2 \mathbb{M}\bar{a} = \omega^2 \mathbb{L}\mathbb{L}^T\bar{a} = \omega^2 \mathbb{L}(\mathbb{L}^T\bar{a})$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\bar{a} = \omega^2(\mathbb{L}^T\bar{a})$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\underbrace{(\mathbb{L}^T)^{-1}(\mathbb{L}^T\bar{a})}_{\mathbb{I}\bar{a}} = \omega^2(\mathbb{L}^T\bar{a})}$$

höfum ummyndað verkefnið í samhverft verkefni

Einfalt algrím má finna á vefnum.

Í wxMaxima er til cholesky-þáttun fyrir töluleg fylki

Í Intel MKL eru til FORTRAN og C undirstefjur (með samhliðavinnslu) sem gera þetta fyrir stór verkefni