Stöðugleiki hringsnúnings

Engir ytri kraftar

$I_3 > I_2 > I_1$ um höfuðása

veljum upphaf $\bar{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$

smá truflun

$$\bar{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3$$

með

$$\lambda << \omega_1$$
$$\mu << \omega_1$$

$$\rightarrow \frac{\lambda\mu}{\omega_1^2} << 1$$

Jöfnur Eulers

$$(I_2 - I_3)\lambda\mu - I_1\dot{\omega}_1 = 0$$
$$(I_3 - I_1)\mu\omega_1 - I_2\dot{\lambda} = 0$$
$$(I_1 - I_2)\lambda\omega_1 - I_3\dot{\mu} = 0$$

$$\dot{\omega}_1 = 0 \rightarrow \omega_1 = \text{fasti}$$

en,

$$\dot{\lambda} = \left\{\frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1\right\}\mu$$

$$\dot{\mu} = \left\{\frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\right\}\lambda$$

tengdar 1. stigs afleiðujöfnur

tökum tíma afleiðu af fyrri jöfnunni

$$\rightarrow \quad \ddot{\lambda} + \left[\frac{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2 I_3}\omega_1^2\right]\lambda = 0$$

með lausn

$$\lambda(t) = A e^{i\Omega_{1\lambda} t} + B e^{-i\Omega_{1\lambda} t}$$

lausn fyrir λ þ. hlutur snýst um 1-ás.

með

$$\Omega_{1\lambda} = \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1-I_3)(I_1-I_2)}{I_2 I_3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 < I_3 \\ I_1 < I_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \Omega_{1\lambda} \in \mathbb{R}$$

Smáar sveiflur um x_2- og x_3-ása vaxa ekki í tíma, stöðugur snúningur um x_1-ás

---

En, höldum $I_3 > I_2 > I_1$ | snúningur í upphafi um x_2- eða x_3-ás leiðir til

$$\Omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_2-I_3)}{I_1 I_3}}$$

$$\Omega_3 = \omega_3 \sqrt{\frac{(I_3-I_2)(I_3-I_1)}{I_1 I_2}}$$

$\rightarrow \Omega_2 \notin \mathbb{R}$ $\rightarrow$ snúningur um X_1- og X_3-ás er stöðugur

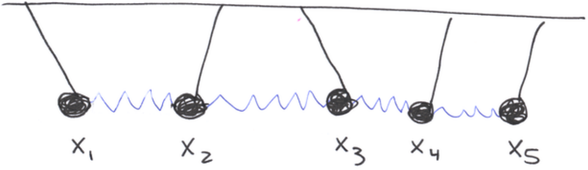
En, snúningur um x_2-ás er ekki stöðugur

snúningur um höfuðása með minnsta eða stærsta hverfiþunga er stöðugur

Ef $I_1 = I_2 \neq I_3$ þá fæst að aðeins snúningur um x_3 er stöðugur, hvort sem I_3 er meiri eða minni en $I_2 = I_1$

Tengdar sveiflur

Skoðum kerfi tengdra sveifna t.d.



Byrjum með hvít þeirra $\longrightarrow$ N-tengdar 2. stigs afleiðujöfnur

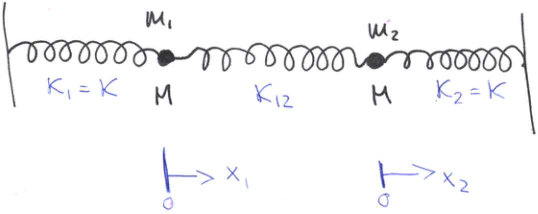
Komumst að því að í stað N-tengdra „pendúla" er heppilegra að fjalla um N-óháða sveifluhætti

Hliðstæða

N-víxlverkandi eindir $\Longleftrightarrow$ N-frjálar sýndareindir

Skoðum dæmi áður en við setjum fram almennar aðferðir

Tveir tengdir hreintóna sveiflar



Kraftur á m_1: $\quad -Kx_1 - K_{12}(x_1 - x_2)$

Kraftur á m_2: $\quad -Kx_2 - K_{12}(x_2 - x_1)$

Hreyfijöfnur

$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (K+K_{12})x_1 - K_{12}x_2 &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + (K+K_{12})x_2 - K_{12}x_1 &= 0 \end{aligned}}$$

Reynum lausn

$$x_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

2 annars stigs jöfnur $\longrightarrow$ 4 óþekktir stuðlar. $e^{i\omega t}$ leyfir fasa, tökum Re

$\boxed{B_i \in \mathbb{C}}$ og fleiri en ein tíðni getur fundist

Reynum lausnir

$$-M\omega^2 B_1 e^{i\omega t} + (K+K_{12})B_1 e^{i\omega t} - K_{12}B_2 e^{i\omega t} = 0$$

$$-M\omega^2 B_2 e^{i\omega t} + (K+K_{12})B_2 e^{i\omega t} - K_{12}B_1 e^{i\omega t} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} K+K_{12}-M\omega^2 & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12}-M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0} \qquad (*)$$

umskrifum þetta sem

óþekkt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} K+K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K+K_{12} \end{pmatrix}}_{\text{þekkt}}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \omega^2 M \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$Ab = \lambda b$$

eiginverkefni

Eigingildin eru

$$\lambda = \begin{cases} K + 2K_{12} \\ K \end{cases}$$

eða

$$\omega^2 = \begin{cases} \dfrac{K + 2K_{12}}{M} \\ \dfrac{K}{M} \end{cases}$$

Eigintíðnir kerfisins eru því

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Eiginvigrarnir eru

$$b_1 = B_1(1, -1)$$

$$b_2 = B_2(1, 1)$$

Heildarlausn á hreyfijöfnunum má finna, en áður útbúum við

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

einóta ummyndun

$$\boxed{\begin{aligned} &\rightarrow UU^t = \mathbb{1} \\ &U^t A U = \begin{pmatrix} K + 2K_{12} & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = A_{diag} \end{aligned}}$$

Skoðum aftur hreyfijöfnurnar

$$M\ddot{x}_1 + (K+K_{12})x_1 - K_{12}x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (K+K_{12})x_2 - K_{12}x_1 = 0$$

umritum sem

$$M\frac{d^2}{dt^2}\bar{x} = A\bar{x}$$

þar sem

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ummyndum með U

$$M\frac{d^2}{dt^2}(U^t\bar{x}) = U^t A U (U^t\bar{x})$$

$$\boxed{M\frac{d^2}{dt^2}(U^t\bar{x}) = A_{diag}(U^t\bar{x})}$$

$$U^t\bar{x} = \left(x_1 - x_2,\ x_1 + x_2\right)\frac{1}{2}$$

$$\equiv (\eta_1, \eta_2)$$

Grunnlausnirnar eru því

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_1(t) &= C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t} \\ \eta_2(t) &= C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned}}$$

sem eru ótengdu eiginsveifluhættir kerfisins (normal hættir)

Enda hreyfijöfnurnar fyrir $U\bar{x}$ ótengdar

Lausnirnar fyrir staðarhnit sveiflana

$$x_1(t) = \{\eta_2(t) + \eta_1(t)\}$$

og

$$x_2(t) = \{\eta_2(t) - \eta_1(t)\}$$

eru ekki óháðar

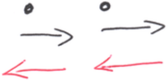
Ef $x_1(0) = x_2(0)$

$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$

$\longrightarrow \eta_1(t) = 0$ f. $\forall t$

samfasa sveiflur

með ω_2



Samhverfur

Ef $x_1(0) = -x_2(0)$

$\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$

$\longrightarrow$ $\eta_2(0) = 0$

$\dot{\eta}_2(0) = 0$

$C_2^+ = 0$

$C_2^- = 0$

$\longrightarrow \eta_2(t) = 0$

$\eta_1(t)$ lýsir and-samhverfum sveiflum f. $\forall t$ með ω_1

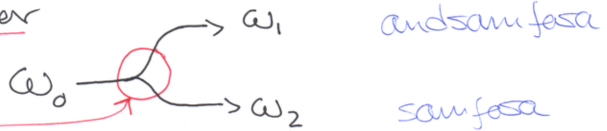
Almennt gildir að samfasa sveifluháttur er með lægri orku en samsvarandi andsamhverfur

Enga orku þarf í miðgorminn hér fyrir samfasasveiflur

Ef við festum m_2 og látum m_1 sveiflast þá gerist það með tíðni $\sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$ sama tíðni fæst fyrir m_1 fastan og m_2 lausan

Köllum $\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$

grunn tíðnina fyrir ótengdu massana, þá fæst klofnun vegna víxlverkunar



Veik tenging

Fengum hér að framan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Ef $K_{12} << K$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}\left(1 + \frac{2K_{12}}{K}\right)}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1 + \frac{2K_{12}}{K}\right)^{1/2}$$

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1 + \frac{K_{12}}{K} \cdots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{K}{M}}\left(1 + 2\epsilon\right)$$

ef $\epsilon \equiv \frac{K_{12}}{2K} << 1$

þá fæst líka

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K + K_{12}}{M}} \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}(1+\epsilon)$$

eða

$$\sqrt{\frac{K}{M}} \simeq \omega_0(1-\epsilon)$$

$\longrightarrow$ $\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}(1+2\epsilon)$, $\simeq \omega_0(1-\epsilon)(1+2\epsilon)$ $\simeq \omega_0(1+\epsilon)$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\simeq \omega_0(1-\epsilon)$

Hreyfum aðeins annan sveifilinn upphaflega

$$x_1(0) = D \qquad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\longrightarrow x_1(t) = \frac{D}{4}\left\{\left(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}\right) + \left(e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}\right)\right\}$$

$$= \frac{D}{2}\left\{\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right\}$$

$$= D\cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}_{=\omega_0 t}\right)\cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}_{=\epsilon\omega_0}t\right) = \overbrace{\left[D\cos(\epsilon\omega_0 t)\right]}^{\text{umslag}}\underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{burðartíðni}}$$

veiktenging
hægur flutningur
orku milli
sveiflna