Horn Eulers

Ummyndun milli tveggja hnitakerfa þar sem öðru hefur verið snúið m.v. hitt má skrifa sem

$$\bar{x} = \lambda \bar{x}'$$

hugsum $\bar{x}'$ í fastakerfinu og $\bar{x}$ í hnitakerfi hlutar

Ummyndunin λ er háð þremur hornum

Skoðum framsetningu Eulers — byggist á hornum kennd við hann. Horn Eulers ϕ, θ, ψ

(sjá mynd á næstu síðu)

① Snúningur um ϕ (andsólis) um x_3'-ás

snýr $x_i' \longrightarrow x_{ii}''$, gerist í x_1'-x_2'-sléttu

$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

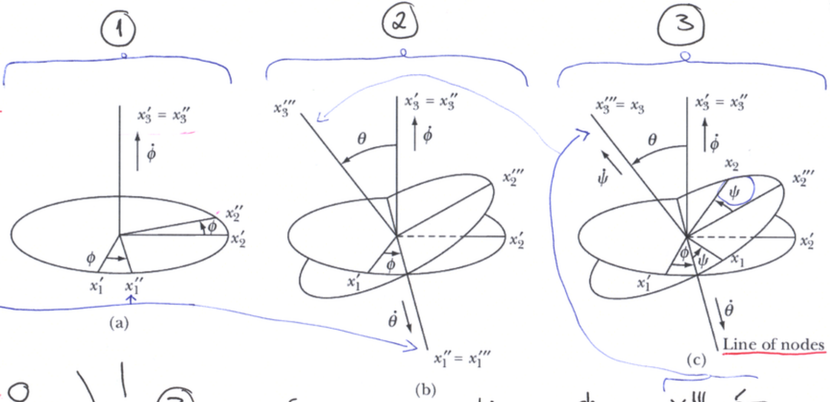
$$x_3'' = x_3'$$

$$\bar{x}'' = \lambda_\phi \bar{x}'$$

2 Snúningur andsælis um θ um x_1''-ás

$x_i'' \longrightarrow x_i'''$

snúningur í x_2''-x_3''-sléttu



$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}''' = \lambda_\theta \bar{x}''$$

3 Snúningur andsælis um ψ um x_3'''-ás

$x_i''' \longrightarrow x_i$, snúningur í x_2'''-x_3'''-sléttu

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \lambda_\psi \bar{x}'''$$

$$\bar{x} = \lambda_{\psi}\,\bar{x}''' = \lambda_{\psi}\lambda_{\theta}\,\bar{x}'' = \underbrace{\lambda_{\psi}\lambda_{\theta}\lambda_{\phi}}_{=\lambda}\,\bar{x}'$$

$$\lambda_{11} = \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi$$
$$\lambda_{21} = -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi$$
$$\lambda_{31} = \sin\theta\sin\phi$$

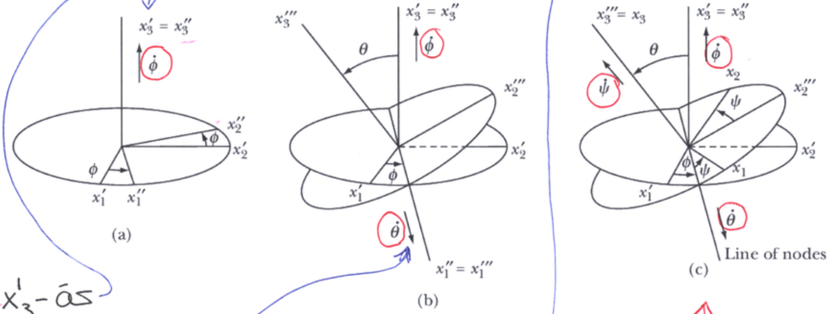
Einfaldara að hafa í huga þættina λ_{ψ}, λ_{θ} og λ_{ϕ}

$$\lambda_{12} = \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi$$
$$\lambda_{22} = -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi$$
$$\lambda_{32} = -\sin\theta\cos\phi$$

$$\lambda_{13} = \sin\psi\sin\theta$$
$$\lambda_{23} = \cos\psi\sin\theta$$
$$\lambda_{33} = \cos\theta$$

$\bar{I}$ snúningnum greinum við $\bar{\omega}$ þ.a.

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_\phi &= \dot{\phi} \\ \omega_\theta &= \dot{\theta} \\ \omega_\psi &= \dot{\psi} \end{aligned}}$$



$\dot{\phi}$: samsíða x_3'-ás

$\dot{\theta}$: samsíða hnútalínunni

$\dot{\psi}$: samsíða x_3-ás

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$$
$$\dot{\theta}_3 = 0$$

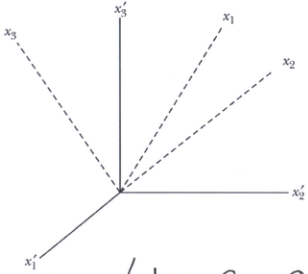
$$\dot{\psi}_1 = 0$$
$$\dot{\psi}_2 = 0$$
$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$$

byrja hér

$\boxed{\text{þættir hornhraða í hnitakerfi hlutar}}$

tökum saman

$$\boxed{\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\phi_1 + \dot\theta_1 + \dot\psi_1 = \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\
\omega_2 &= \dot\phi_2 + \dot\theta_2 + \dot\psi_2 = \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\
\omega_3 &= \dot\phi_3 + \dot\theta_3 + \dot\psi_3 = \dot\phi \cos\theta + \dot\psi
\end{aligned}}$$



Dømi

Finnum ummyndun sem flytur x_1'-ás í x_2'-x_3'-slettu mitt milli x_2' og x_3' og setur x_2' hornrætt á x_2'-x_3'-slettu

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Aðeins snúningur um θ getur ført $x_3' \rightarrow x_3$

Til at fá x_1'-ás mitt milli x_2' og x_3'-áss þarf 45° snúning um θ

þessi snúningur er um x_1'-ás sem er líka x_1''-ás

$\rightarrow \lambda_\phi = 1$

fæst þá með snúninginum $\psi = 90^\circ$

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Jöfnur Eulers fyrir stjarfhlut

Byrjum með enga ytrikrafta, $U = 0$

$L = T$, x_i-ásarnir (kerfihlutar) eru höfuðásar

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

þá fæst

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

Veljum horn Eulers sem alhnit. Þá fæst fyrir ψ

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = 0$$

Umskrifum sem

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} \right) \right\} = 0$$

Athugum afleiðurnar

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi = \omega_2$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi - \dot{\theta} \cos\psi = -\omega_1$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i$$

því verður Euler-Lagrange jafnan

$$I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 (-\omega_1) - \frac{d}{dt}\left(I_3 \omega_3\right) = 0$$

eða

$$(I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 - I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

Þetta raknar ekki svona vel upp fyrir $\dot{\omega}_1$ og $\dot{\omega}_2$

En, númerun ásanna og höfuðásanna er ekki einhlít því verður að gilda

$$\boxed{\begin{aligned} (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_2\dot{\omega}_2 &= 0 \\ (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}}$$

athugið samhverfu

<u>Jöfnur Eulers</u> fyrir hreyfingu án ytri krafts

Til að leiða út jöfnurnar fyrir ytri kraft er einfaldast að nota

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \bar{N} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{body} + \bar{\omega}\times\bar{L} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{body} + \bar{\omega}\times\bar{L} = \bar{N}$$

þá fæst fyrir x_3-ásinn (hlutar)

$$\dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = N_3$$

og þar sem við völdum hnitakerfi eftir höfuðásum

$$L_i = I_i \omega_i \quad \rightarrow \quad I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

endurröðun ásamerkingar gefur

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

Ef við notum Levi-Civita táknið í 3-víddum

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ef } (1,2,3)\ (2,3,1)\ (3,1,2) \\ -1 & \text{ef } (3,2,1)\ (1,3,2)\ (2,1,3) \\ 0 & \text{ef } i=j \text{ eða } j=k \text{ eða } k=i \end{cases}$$

rásuð umröðun

$$\boxed{(I_i - I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k (I_k \dot{\omega}_k - N_k)\epsilon_{ijk} = 0}$$

Tveir mismunandi hlutir með sömu hverfitregður um höfuðása hreyfast því eins

← engir viðnámskraftar

því er oft talað um jafngildar sporvölur (ellipsoids)

Skoðum aftur dæmi sem við tókum áður

Tveir massar á massalausri stöng

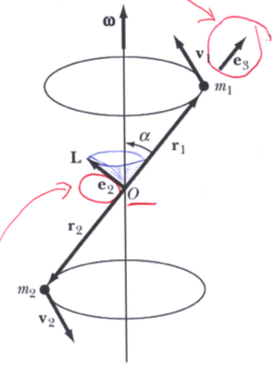
Finnum $\bar{L}$ fyrir kerfið og $\bar{N}$

til að viðhalda hreyfingunni

$|\bar{r}_1| = |\bar{r}_2| = b$, x_3 er samhverfuás kerfisins

$\bar{L} = \sum_\alpha m_\alpha \bar{r}_\alpha \times \bar{v}_\alpha$ þvert á stöng og snýst með

kerfinu $\longrightarrow$ setjum $\bar{L} = L\hat{e}_2$



$\omega_1 = 0$ ← verður að vera þvert á $\bar{\omega}$, sjá mynd

$\omega_2 = \omega \sin\alpha$

$\omega_3 = \omega \cos\alpha$

Höfuðásarnir eru x_1, x_2, x_3 og hverfitregður um þá eru

$$I_1 = (m_1 + m_2) b^2 \qquad L_1 = I_1 \omega_1 = 0$$

$$I_2 = (m_1 + m_2) b^2 \qquad L_2 = I_2 \omega_2 = \underbrace{(m_1 + m_2) b^2 \omega \sin\alpha}$$

höfðum jú sett $\bar{L} = L\hat{e}_2$ svo þetta ber saman

$$I_3 = 0 \qquad L_3 = I_3 \omega_3 = 0$$

Jöfnur Eulers eru

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} -I_2\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ 0 &= N_2 \\ 0 &= N_3 \end{aligned}\right.$$

Ef $\dot{\omega}_i = 0$

Ef snúningi er viðhaldið þá fæst $\dot{\omega}_i = 0$

og frá jöfnum Eulers

$$-I_2\omega_2\omega_3 = N_1$$

Þa

$$N_1 = -(m_1+m_2)b^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha$$