Höfuðásar hverfitregðu (principal axes of inertia)

Við höfum lært út

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

eða $\bar{L} = \mathbb{I}\cdot\bar{\omega}$

Ef $\mathbb{I}$ væri á hornalínuham

$$I_{ij} = I_i\delta_{ij}$$

með

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

þá væri

$$L_i = \sum_j I_i\delta_{ij}\omega_j = I_i\omega_i$$

og

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_i\delta_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\sum_i I_i\omega_i^2$$

Verkefnið er því að finna ása þ.a. stök $\mathbb{I}$ utan hornalínu hverfi

→ ásarnir kallað höfuðásar hverfitregðu

Munum að $\mathbb{I}$ er samhverft
þ.a. $I_{ij} = I_{ji}$

Ef hlutur snýst um höfuðás
þá eru $\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ samsíða

$$\bar{L} = I\bar{\omega}$$

þ.s. I er hverfitregðan um ásinn. En, þetta má skrifa sem

$$\bar{L} = \boxed{\mathbb{I}\cdot\bar{\omega} = I\bar{\omega}}$$

→ eigingildisverkefni

Eigingildin eru hverfitregður höfuðásanna

Höfuðásarnir eru í réttu hlutfalli við eiginvigrana

Höfuðásarnir eru hornréttir

Ef við útbúum fylki með stöðluðu eiginvigrunum í dálkum

$$U = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{array}$$

þá fæst einótta ummyndun

$$\mathbb{I}_d = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = U^{+}\,\mathbb{I}\,U$$

tengjum betur við hnitaskipti bráðum

Ef hlutur er með einn snúningssamhverfuás

og hverfitregðu I_1 um hann þá eru $I_2=I_3$

Tvöfalt eigingildi og nákvæm staðsetn!

hinna tveggja ásanna skiptir ekki máli, en þeir eru hornréttir á samhverfuásinn

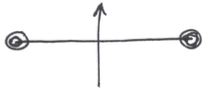
↑ önnur rót kennijöfnunnar fyrir eigingildin er tvöföld

Kúlusnúður: $I_1 = I_2 = I_3$

Samhverfur snúður: $I_1 = I_2 \neq I_3$

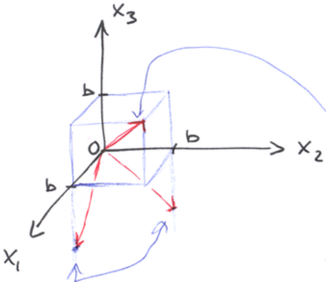
Ósamhverfur snúður: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

$I_1 = 0$, $I_2 = I_3$ rotor



þyrill?

Dæmi



Finnið hverfitregðu um höfuðása og höfuðásana

Við vorum búin að finna að miðað við 0

$$\mathbb{I} = Mb^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Notum wxmaxima og finnum

eigingildi — eiginvigrar

$$I_1 = Mb^2 \cdot \frac{1}{6} \longleftarrow (1,1,1)$$

$$I_2 = I_3 = Mb^2 \cdot \frac{11}{12} \longleftarrow \underbrace{(1,0,-1) \text{ og } (0,1,-1)}$$

fyrst einn ás er með $I_1 = Mb^2 \cdot \frac{1}{6}$

og hinir $I_2 = I_3 = Mb^2 \cdot \frac{11}{12}$ þá

er I_1 hverfitregða um samhverfuás

sem er (1,1,1)

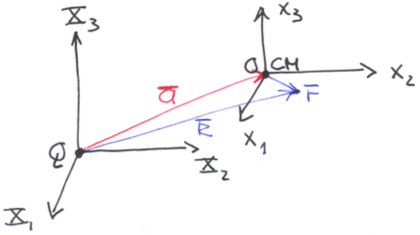
Hinir höfuðásarnir þurfa ekki að vera nákvæmlega (1,0,-1) eða (0,1,-1), en þeir eru almennt hornrétt samantekt þessara vigra

og þar með líka hornréttir á (1,1,1)

Hverfitregða fyrir viðmiðandi hnitakerfi í hlutnum

Til að skilja að T_{rot} og T_{trans} settum við miðjuhnitakerfis hlutar í CM

Athugum tvö hnitakerfi með samsíða ása, en annað er hliðrað úr CM



$$\bar{R} = \bar{a} + \bar{r}$$

$$X_i = a_i + x_i$$

Miðað við X-kerfið er

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right]$$

$$J_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right\}$$

$$+ \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \left(2 x_{\alpha,k} a_k + a_k^2 \right) - \left(a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j \right) \right\}$$

$$= \underbrace{I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right\}} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ 2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha,j} - a_j x_{\alpha,i} \right\}$$

minimum at

$$\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{CM} = 0 \quad \rightarrow \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k} = 0$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \, 2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k = 2\delta_{ij} \sum_k a_k \left\{ \sum_\alpha m_\alpha x_{\alpha,k} \right\} = 0$$

$$\rightarrow J_{ij} = I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right\}$$

En

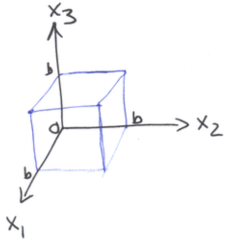
$$\sum_\alpha m_\alpha = M \quad \text{og} \quad \sum_k a_k^2 = a^2$$

$$\rightarrow \boxed{I_{ij} = J_{ij} - M\left[a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right]}$$

Setning Jacob Steiner um samsíða ása

Skoðum teninginn aftur

Við fundum J_{ij} um O sem var ekki CM



$$\mathbb{J} = Mb^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

CM er $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$\rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \frac{b}{2}$

$\rightarrow I_{ii} = \frac{1}{6} Mb^2$

$I_{ij} = 0$ ef $i \neq j$

Því fæst

$$\mathbb{I} = Mb^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{Mb^2}{6}\,\mathbb{1} = \frac{Mb^2}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eiginvigrarnir eru $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$ sem liggja þvert á hliðar teningsins

↑ ekki er hægt að gera upp á milli hliða teningsamhverfa

Í raun ef CM er notað geta höfuðásarnir miðað við CM haft hvaða stefnu sem er svo lengi sem þeir eru hornréttir

↑

ennþá samhverfar

og $\mathbb{I}$ heldur áfram að vera á hornalínuham.

Athugum fretar hverfitregðuþininn

Höfum líka út

$$L_k = \sum_l I_{kl}\,\omega_l$$

Þetta er vigurjafna, því verður að gilda í hnitakerfi sem er snúið m.v. það fyrra

$$L'_i = \sum_j I'_{ij}\,\omega'_j$$

$\bar{L}$ og $\bar{\omega}$ eru vigrar og því gildir

$$\boxed{x_i = \sum_j \lambda^t_{ij}\,x'_j = \sum_j \lambda_{ji}\,x'_j}$$

Almennt fyrir vigra

$\rightarrow$

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk}\,L'_m$$

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl}\,\omega'_j$$

$\bar{\lambda}$ er snúningsfylkið með

$$\sum_j \lambda_{ij}\,\lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

eða

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda\lambda^t &= \mathbb{1}\\ \lambda^t &= \lambda^{-1}\end{aligned}}$$

hornrétt fylki ← útvíkkun á þeim eru einöku fylki

$$L_k = \sum_l I_{kl}\,\omega_l$$

$$\rightarrow \quad \sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl}\,\omega'_j$$

margföldum báðar hliðar með λ_{ik} og summum yfir k

$$\sum_m \underbrace{\left[\sum_k \lambda_{ik}\lambda_{mk}\right]}_{=\delta_{im}} L'_m = \sum_j \left[\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\right]\omega'_j$$

$$\rightarrow \quad L'_i = \sum_j \left[\sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}\right]\omega'_j$$

$$\rightarrow \quad I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\lambda_{jl} I_{kl}$$

Endurritum

$$\boxed{I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^t_{lj}}$$

Það sem ummyndast á þennan hátt er skilgreint sem 2. stigs þinur

$$\boxed{\mathbb{I}' = \lambda \mathbb{I} \lambda^{-1}}$$

Einslögunar ummyndun (similarity transformation)

Við vorum búin að sjá að fyrir tening m.v. CM-hnit fékkst

$$\mathbb{I} = \frac{1}{6} M b^2 \mathbb{1}$$

því vegna fast fyrir hvaða snúning sem er að

$$\mathbb{I}' = \frac{1}{6} M b^2 \lambda \mathbb{1} \lambda^{-1} = \frac{1}{6} M b^2 \lambda \lambda^{-1} = \frac{1}{6} M b^2 \mathbb{1} = \mathbb{I}$$

fyrir samhverft fylki gildir
að eigingildin eru rauntölur
og eiginvigrarnir eru hornréttir

samanburður við bls 2 í þessum nótum sýnir að ummyndanir til að ná $\mathbb{H}$ á hornalínuham má hugsa sem snúninga í 3-víða rúminu.

þetta gildir fyrir öll samhverf fylki eða Hermísk í hvaða vídd sem er

Example 11.8 í bók sýnir hvernig U fyrir teninginn má skrifa sem tvo snúninga

$$U = \lambda_2 \lambda_1$$

og

$$\mathbb{H}_d = U^+ \mathbb{H}\, U$$

á hornalínuham