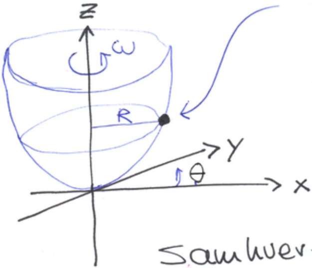
Skoðum enn aflfræði Lagrange

Dæmi



Fleygbogi $z = cr^2$

Massi m getur runnið eftir fleygboganum þegar hraðinn er ω og massinn snýst með geisla R finnum c

Samhverfa $\rightarrow$ notum sívalnings hnit (r, θ, z)

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 + \dot{z}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right\} \\ \text{og} \quad U &= mgz \end{aligned}}$$

Hnitin (r, θ, z) eru ekki óháð vegna fleygbogaskorðu

$$z = cr^2 \rightarrow \dot{z} = 2cr\dot{r} \quad \text{og} \quad \theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega$$

því er eina óháða hnitið r

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 + (2cr\dot{r})^2 + (r\omega)^2 \right\} - mgcr^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$m\left\{4c^2r\dot{r}^2 + r\omega^2 - 2gcr\right\} - \underbrace{\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(2\dot{r} + 8c^2r^2\dot{r}\right)\right\}}_{= m\left\{\ddot{r} + 8c^2r\dot{r}^2 + 4c^2r^2\ddot{r}\right\}} = 0$$

$$= \boxed{\ddot{r}\left\{1 + 4c^2r^2\right\} + \dot{r}^2\left\{4c^2r\right\} + r\left\{2gc - \omega^2\right\} = 0}$$

Hreyfijafna fyrir Kerfið

Ef massinn snýst með $r = R =$ fasti $\rightarrow \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$
og kraftjafnan er þá

$$R\left[2gc - \omega^2\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{C = \frac{\omega^2}{2g}}$$

Jöfnur Lagrange með óákveðnum margföldurum

Ein smá viðbót

vegna hraða

Skorður af tegund $f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0$ eru ekki heilnefndar
nema þær megi heilda t.a. gefa $f(x_{\alpha i}, t) = 0$

þá eru þær nefndar hálfheilnefndar (hálfnefndar?)

Athugum $\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0$ almennt ekki heildanleg nema ef

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t)$$

því þá eru skorðurnar

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{df}{dt} = 0$$

heildunarfasti

og heildun leiðir til

$$f(x_i, t) - C = 0$$

því eru skorður

$$\boxed{\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t}dt = 0} \quad (*) \quad \text{og} \quad \boxed{f_k(x_{\alpha,i}, t) = 0}$$

jafngildar

Áður sáum við að skorður

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j}dq_j = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \cdots s \\ k = 1, 2, \cdots m \end{cases}$$

leiða til

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0} \quad (**)$$

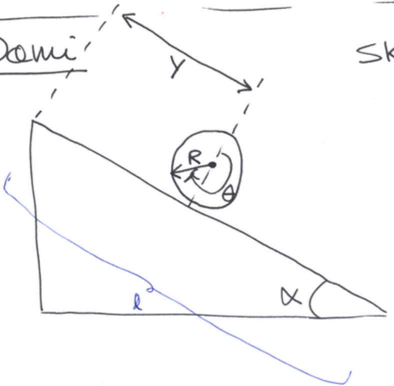
Vegna þess að hnitunin krefst að byrjun og endir ferils séu við fastan tíma leiðir (*) til sömu jöfnu Lagrange (**)

Í jöfnu (**) eru

$$\boxed{Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}}$$

alkraftar vegna skorða

Dæmi



Skífa veltur niður skábretti

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$$

því $I = \frac{1}{2} M R^2$

$$U = Mg(l-y)\sin\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{L = T-U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(y-l)\sin\alpha}$$

En hnitin y og θ eru háð gegnum veltiskorður

$$f(y,\theta) = y - R\theta = 0$$

Því standa tvær leiðir til boða

1) Við getum notað skorðurnar til að fækka hnitum í eitt, y eða θ

eða

2) Notað bæði hnitin, y eða θ, með Lagrange margföldurum

Reynum báðar

2

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \longrightarrow Mg\sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0$$

3 jöfnur, 3 óþekktar stærðir, y, θ, λ

og frá stærðunum $y = R\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y}$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{2g\sin\alpha}{3}}$$ eða líka $\lambda = -\frac{Mg\sin\alpha}{3}$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}}$$

Hreyfijafna

Ef skífan veltur ekki (rennur) þá fæst

$$\ddot{y} = g \sin\alpha$$

→ veltan minnkar hröðunina í $\frac{2}{3}$

því hlýtur viðnámskrafturinn sem veldur veltunni að vera

$$\boxed{-\frac{Mg}{3}\sin\alpha} \leftarrow = \lambda$$

Skoðum alkrafta

$$Q_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{Mg}{3}\sin\alpha \leftarrow$$ Viðnámskraftur

↕

$$Q_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{MgR}{3}\sin\alpha \leftarrow$$ vogi hans, undir tengt θ

1

$$L = \frac{1}{2} M\dot{y}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 + Mg(y-\ell)\sin\alpha$$

↑ engin θ kemur fyrir

Veltuskorður $y - R\theta = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$

setjum inn í L

$$\rightarrow L = \frac{3}{4} M\dot{y}^2 + Mg(y-\ell)\sin\alpha$$

ein breyta eftir, y er heppilegt alhnit

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow Mg\sin\alpha - \frac{3}{2} M\ddot{y} = 0$$

eða $\boxed{\ddot{y} = \frac{2g}{3}\sin\alpha}$

sama hreyfijafna og áður, en engar upplýsingar um álkrafta

Dæmi

Ögn á kúluhveli

Viljum finna hornið þegar ögnin losnar frá hvelinu

Ögnin þarf að geta losnað → alhnit r, θ

skorður: á hveli $f(r,\theta) = r - a = 0$

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right\} - mgr\cos\theta}$$

Notum

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \rightarrow mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\ddot{r} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \rightarrow mgr\sin\theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Skorður $r = a \rightarrow \dot{r} = 0, \ \ddot{r} = 0$

$$\rightarrow \quad ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$mga\sin\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta}$$

sem við getum heildað

Notum

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}}$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta \quad \text{eða} \quad \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta \cdot d\theta$$

heildum

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = \frac{g}{a}\int_0^{\theta} d\theta' \sin\theta'$$

$$\rightarrow \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a}\left\{\cos\theta - 1\right\}$$

En, við fengum áður $ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0$

Eyðum $\dot{\theta}^2$ úr ~~þessum~~ tveimur jöfnum

$$2ma\left\{\frac{g}{a} - \frac{g}{a}\cos\theta\right\} - mg\cos\theta + \lambda = 0$$

$$\rightarrow 2mg\{1-\cos\theta\} - mg\cos\theta = -\lambda$$

$$\rightarrow \lambda = mg[3\cos\theta - 2]$$

sem er alkraftur vegna skorðu

$\rightarrow$ ögnin losnar þegar $\lambda = 0$

þegar $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ $\rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0{,}84$ rad lesa sjálf um jafngildi Newtons og Hamiltons framsetningu aflfræði í 7.6

Newton	Hamiltons
kraftar, hraði, hverfiþungi	skalarstærðir í staðarrúminu
→ vigrar	orka
	hnikun, lágmörkun heildis

Afleidd framsetning

↓

orsaka lögmál

Endurspeglast í mism. framsetningum á stamnta fræði