Þvingaðar sveiflur (Driven)

Skoðum sveifil sem á verkar krafturinn

$$F = \underbrace{-kx}_{\text{Kraftur til baka í jafnvægi}} \underbrace{- b\dot{x}}_{\text{Viðnám}} + \underbrace{F_0 \cos(\omega t)}_{\text{Þvingun}}$$

Hreyfijafnan verður

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)}$$

$$\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$[\beta] = \frac{1}{T}, \quad [\omega_0^2] = \frac{1}{T^2}$$

$$[A] = \left[\frac{F_0}{m}\right] = \frac{L}{T^2}$$

Hreyfijafnan er hliðruð (inhomogeneous)

Grunnlausn óhliðruðu jöfnunnar

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

er

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}\right\}$$

með $\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Okkur nægir að finna eina sérlausn á hliðruðu jöfnunni til að fá almenna lausn hliðruðu jöfnunnar

$$L(x_c) = 0$$
$$L(x_p) = f$$

$$L(x_c + x_p) = L(x_c) + L(x_p)$$
$$= 0 + f$$

Stuðlarnir A_1 og A_2 nogja til að uppfylla upphafsskilyrðin

Giskum á sérlausn

$$x_p(t) = D\cos(\omega t - \delta)$$

takið eftir að hér sést ekki dofnun í x_p

setjum inn í hreyfijöfnu
D og δ eru ekki enn ákvörðuð

$$-\omega^2 D\cos(\omega t-\delta) - 2\beta\omega D\sin(\omega t-\delta)$$
$$+\omega_0^2 D\cos(\omega t-\delta) = A\cos(\omega t-\delta)$$

we have terms with Cos and Sin
therefore we use

$$\boxed{\cos(\omega t-\delta) = \cos(\omega t)\cos(\delta) - \sin(\omega t)\sin(\delta)}$$

$$\boxed{\sin(\omega t-\delta) = \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)}$$

Söfnum saman $\sin(\omega t)$ og $\cos(\omega t)$ - liðum

$$\left\{-A - D\left[(\omega^2-\omega_0^2)\cos(\delta) - 2\omega\beta\sin(\delta)\right]\right\}\cos(\omega t)$$
$$-\left\{D\left[(\omega_0^2-\omega)\sin(\delta) - 2\omega\beta\cos(\delta)\right]\right\}\sin(\omega t)$$
$$= 0$$

Samtímis er hægt að uppfylla ef

$$D = \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\delta) + 2\omega\beta\sin(\delta)}$$

$$\boxed{\tan(\delta) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

Við vitum að

$$\left\{\begin{aligned} \sin\theta &= \pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\ \cos\theta &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \end{aligned}\right.$$

setjum því

$$\sin\delta = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

þá verður

$$\boxed{D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}}$$

og

$$\boxed{\delta = \operatorname{Arctan}\left\{\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}}$$

Við höfum ákvarðað D og δ og því almennu lausnina tökum van deyfðan sveifil

Lausnin er

$$x(t) = \underline{x_c(t)} + x_p(t)$$

→ Grunnlausnin er með veldisvísis deyfingu $e^{-\beta t}$

→ $\boxed{x(t \gg 1/\beta) \to x_p(t)}$

Svipula lausnin (transient) x_c hverfur þ. $t \to \infty$ ($\beta t \gg 1$)

Eftir verður sístæða lausnin $x_p(t)$, sem er þvinguð að utan

Sístæða lausnin er óháð því hvernig var kveikt á kerfinu

Innbyrðis hlutföll $x(0), \dot{x}(0), A, \omega_0, \omega, \beta$

breyta mjög útliti lausnar $x(t)$ fyrir $\beta t < 1$

Sjá mynd 3-15 í bók Marions og 3-8 í D. Cline og Lausnir VG 2018-02-06

Hermun

Vandeyfður sveifill

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$$

útslag í sístæðri lausn, lotubundin, er ekki með hámark fyrir $\omega = \omega_0$

Hámarkið fæst þegar

$$\left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

Hermutíðni

$$\rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Kerfið með frjálsar ódeyfðar sveiflur sveiflast með

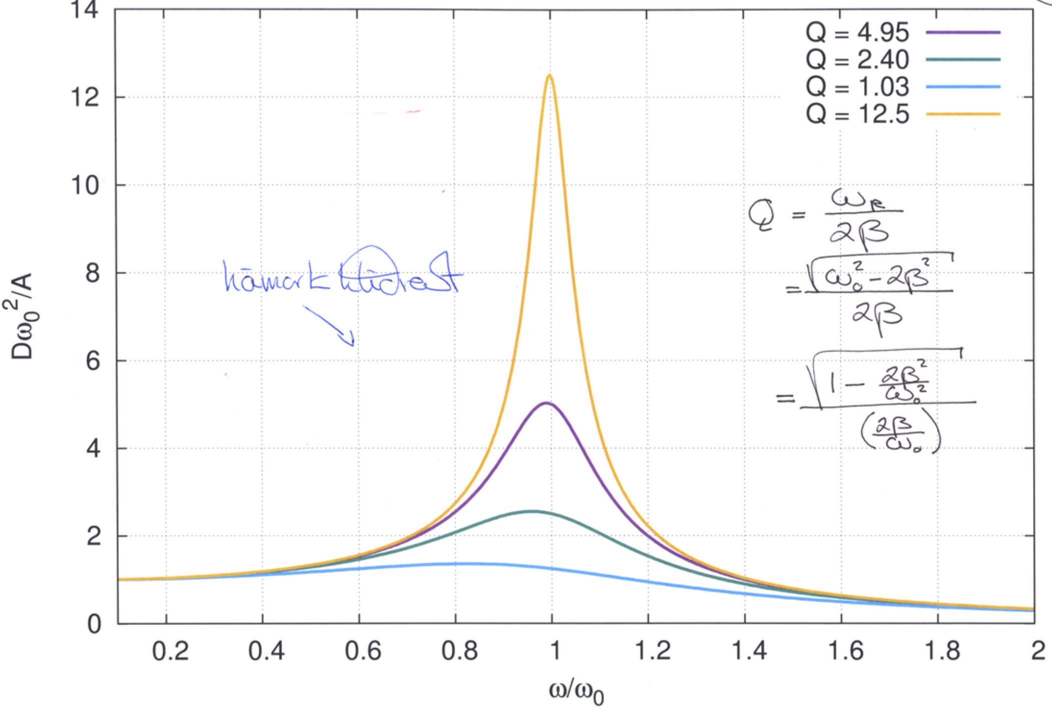
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

frjálsar deyfðar sveiflur

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

þvingaðar sveiflur, deyfðar

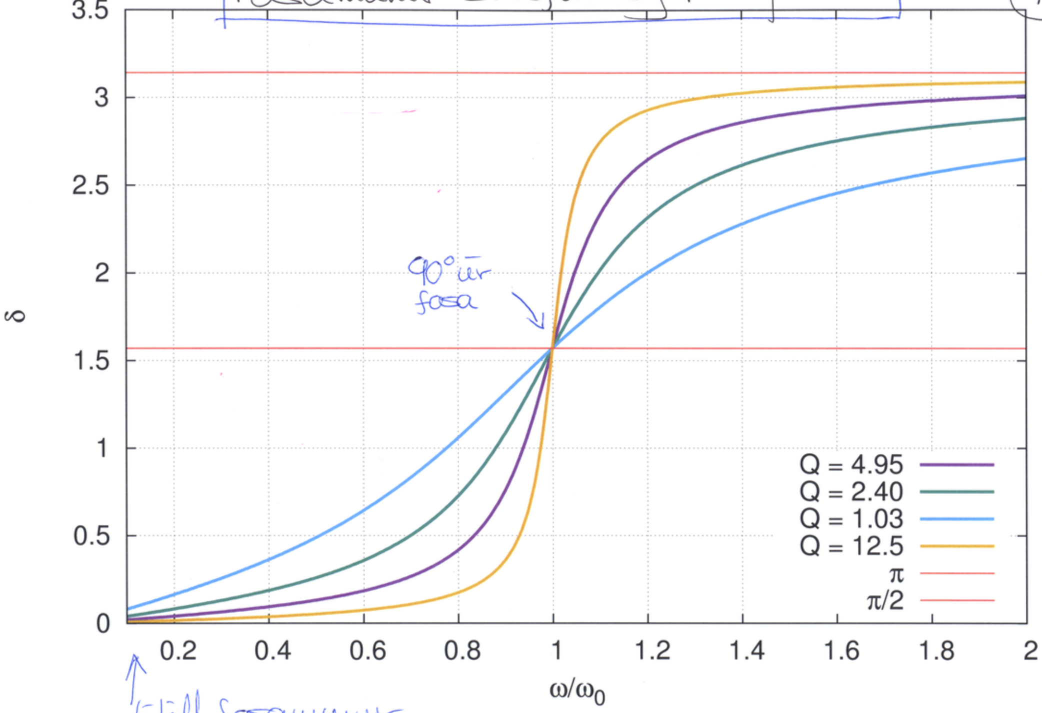
$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



hāmarkthicrest

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{2\beta} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}}}{\left(\frac{2\beta}{\omega_0}\right)}$$

Fasamunur Sveiflu og þvingunar



lítill fasamunur

Hreyfiorka – stöðuorka

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \frac{-A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\rightarrow T = \frac{mA^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \sin^2(\omega t - \delta)$$

Við munum að $U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ og því sveiflast T og U 90° úr fasa, en

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t - \delta) \right\}$$

$$= \frac{mA^2}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

því fæst að

$$\left.\frac{d\langle T\rangle}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_E} = 0$$

gefur

$$\omega_E = \omega_0$$

Herman í hreyfiorkunni er við $\omega = \omega_0$

stöðuorkan $\sim A^2$, því er herman í stöðuorkunni við

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Ástæðan fyrir þessu er að kerfið er opið, orku er eytt úr því með viðnámsliðnum og dælt inn í það með þvingunarliðnum

---

Kerfi

Mekanískt kerfi

Rafrásir

{Í dæmi Ex. 3.4 er rangt að segja að Kirchhoff-regla gefi ..., það er lögmál Faradays}

Geislandi kerfi

Atóm ... ..

Samlagning lausna

Við ráðum við flóknari þvingunarliði
skoðum lotubundna $F(t+\tau) = F(t)$,
$\tau = 2\pi/\omega$.

Línulegur virki táknar afleiðujöfnuna

$$\mathbb{L}x(t) = F(t)$$

$$\mathbb{L}(x_1 + x_2) = \mathbb{L}x_1 + \mathbb{L}x_2 \rightarrow \mathbb{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$$

eða almennt

$$\mathbb{L}\left\{\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n F_n(t)$$

þess vegna ef

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n)$$

þá fæst sístæðalausnin

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}}$$

$$\delta_n = \mathrm{Arctan}\left\{\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right\}$$

Fourier fann að lotubundin föll, $F(t+\tau) = F(t)$, með lotu $\tau = 2\pi/\omega$ má skrifa sem

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right\}$$

þ.s.

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\, \cos(n\omega t')$$

$$n\omega t' = 2\pi n \frac{t'}{\tau}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} dt'\, F(t')\, \sin(n\omega t')$$

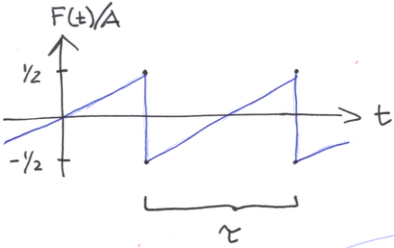
Þetta er vegna þess að föllin $\cos(n\omega t)$ eru hornrétt

$$\int_0^{\tau} dt'\, \cos\left(2\pi n \frac{t'}{\tau}\right)\cos\left(2\pi m \frac{t'}{\tau}\right) = \frac{1}{4}\int_0^{\tau} dt \left\{e^{2\pi n \frac{t'}{\tau}} + e^{-2\pi n \frac{t'}{\tau}}\right\}\left\{e^{2\pi m \frac{t'}{\tau}} + e^{-2\pi m \frac{t'}{\tau}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\tau} dt' \left\{e^{2\pi \frac{t'}{\tau}(n-m)} + e^{-2\pi \frac{t'}{\tau}(n-m)}\right\} = \frac{\tau}{2}\,\delta_{n,m} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} & \text{ef } n=m \\ 0 & \text{ef } n\neq m \end{cases}$$

TiL gamans má athuga sagtannarfallið

$$F(t) = A\frac{t}{\tau} \quad \text{ef} \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$



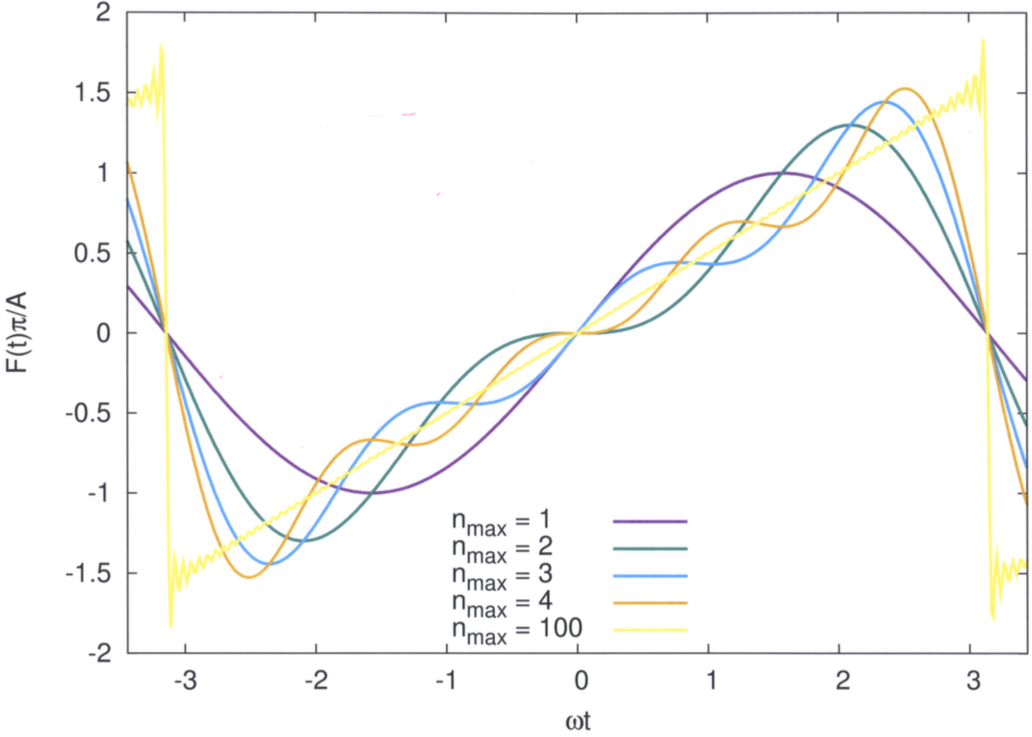
oddstætt $\rightarrow$ $a_n = 0$

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} dt'\, t' \sin(n\omega t')$$

$$= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left\{ -\frac{t'\cos(n\omega t')}{n\omega} + \underbrace{\frac{\sin(n\omega t')}{n^2\omega^2}}_{=0} \Bigg|_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \right\}$$

$$= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2}\left\{ -\frac{2\pi}{\omega^2 n}\cos(n\pi)\right\} = \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\rightarrow F(t) = \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\omega t)}{n}(-1)^{n+1}\right\}$$



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
F(t)π/A
-3
-2
-1
0
1
2
3
ωt
n_max = 1
n_max = 2
n_max = 3
n_max = 4
n_max = 100