Kasthreyfing með loftmótstöðu ↔ töluleg lausn

Við fengum nákvæma lausn með greinireikningi, en þurftum nálgun t.þ.a reikna seilni

Hvernig mætti nálgast lausn fyrir flóknara líkan af mótstöðu? (eða almenna aðferð fyrir flestar hreyfijöfnur sem verða á vegi okkar í þessu námskeiði)

Ekki í bók ← (en verður í Greiningu III)

Skoðum fyrir kasthreyfingu
Hreyfijöfnurnar voru

$$\ddot{x} = -k\dot{x}$$
$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g$$

Tvær óháðar annarsstigs afleiðujöfnur. Þær gætu verið háðar og fleiri og flóknari, líka ólínulegar

Breytum þeim í hneppi 1. stigs afleiðujafna

Hér þurfum við 4 breytur, köllum y_1, y_2, y_3, y_4

Setjum

$$y_1 = x \longrightarrow \dot{y}_1 = \dot{x} = y_2$$

$$y_2 = \dot{x} \longrightarrow \dot{y}_2 = \ddot{x} = -k\dot{x} = -ky_2$$

$$y_3 = y \longrightarrow \dot{y}_3 = \dot{y} = y_4$$

$$y_4 = \dot{y} \longrightarrow \dot{y}_4 = \ddot{y} = -k\dot{y} - g = -ky_4 - g$$

Hneppið er því

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -ky_2 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= -ky_4 - g \end{aligned}}$$

Hneppi 1. stigs afleiðujafna línulegt

Lausn gefur

$x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$

Ég nota undirstefjuna „ddriv1.f" úr opna Slatec forritasafninu (www.netlib.org/slatec) til að leysa hneppið í stuttu FORTRAN forriti sem ég þýði með gfortran ← opið og til fyrir öll stýrikerfi

> fyrir þá sem hafa áhuga dreifi ég nokkrum forritum, þýddu Slatec-safninu og skriftum fyrir gnuplot og keyrslu forritanna á vefsíðu námskeiðsins

Val forritunarmáls, opið mikill hraði, allar keyrslur sýndar hér á eftir fyrir lausnir í $4 \times 30{,}000$ punktum taka sekúndubrot

Berum saman lausnir fyrir v- og v^2-loftmótstöðu

Athugið að fyrir v^2-loftmótstöðu þarf

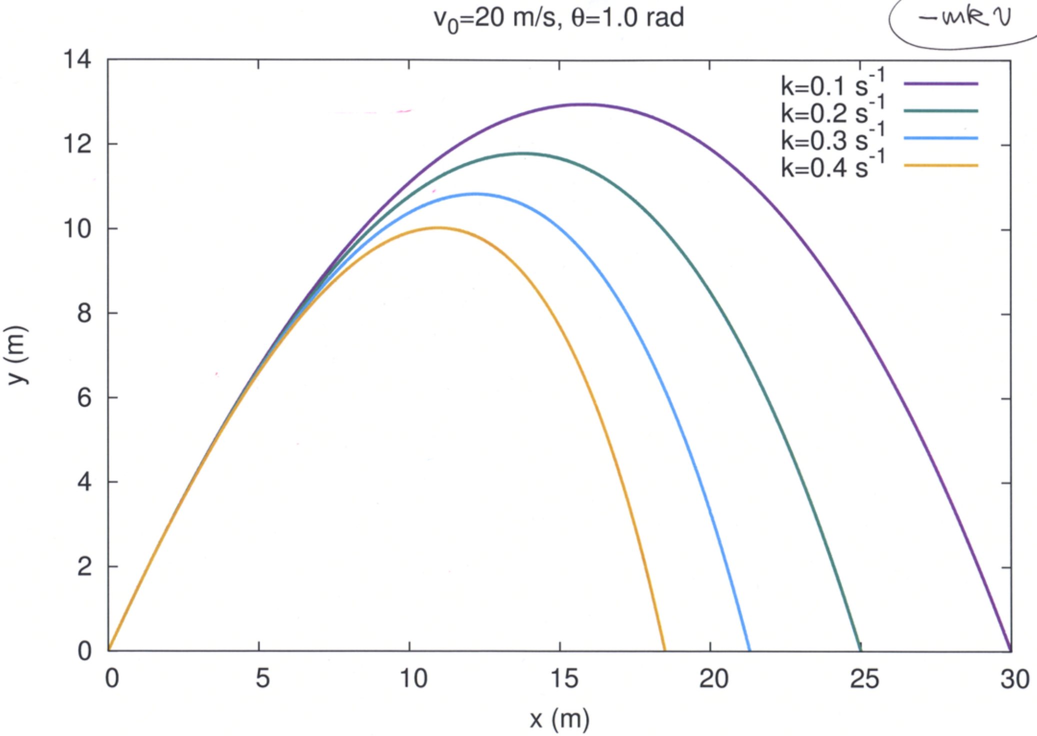
$$\bar{F} = m\bar{g} - mDv^2 \frac{\bar{v}}{v}$$

$[k] = \frac{1}{T}$

$[D] = \frac{1}{L}$

④

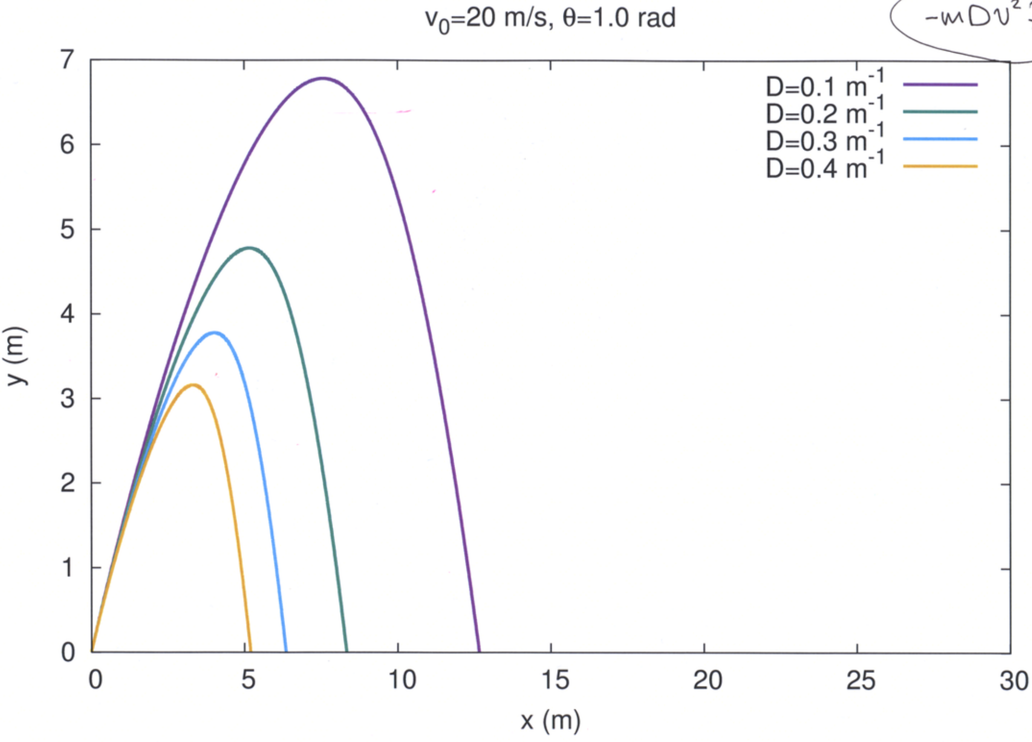
$-mkv$

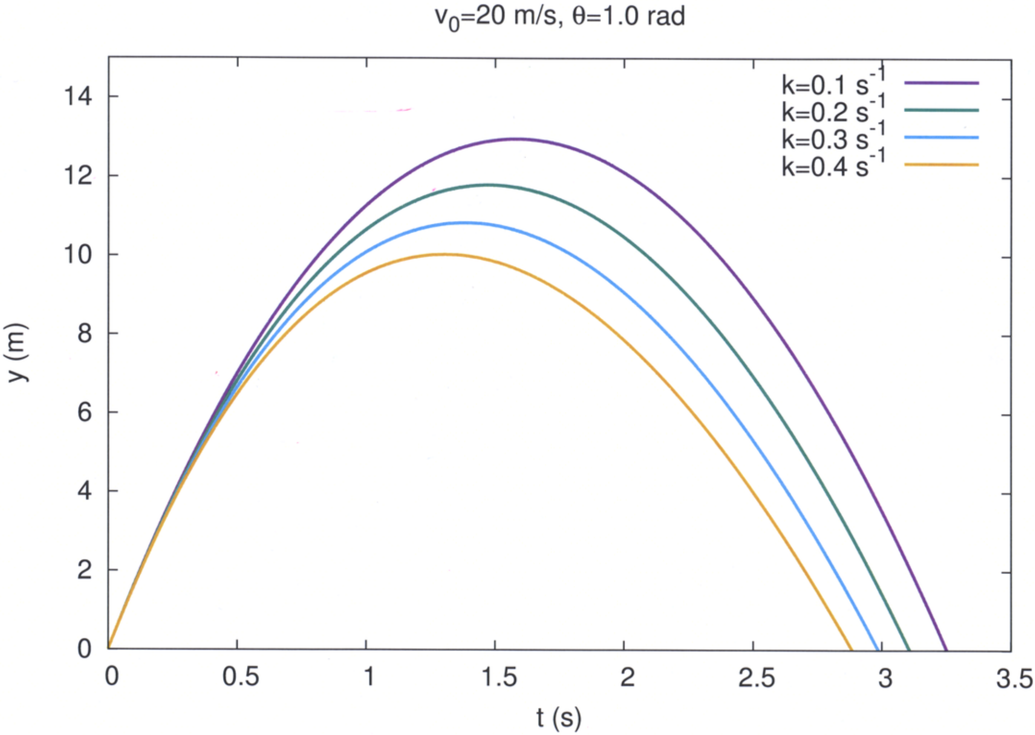


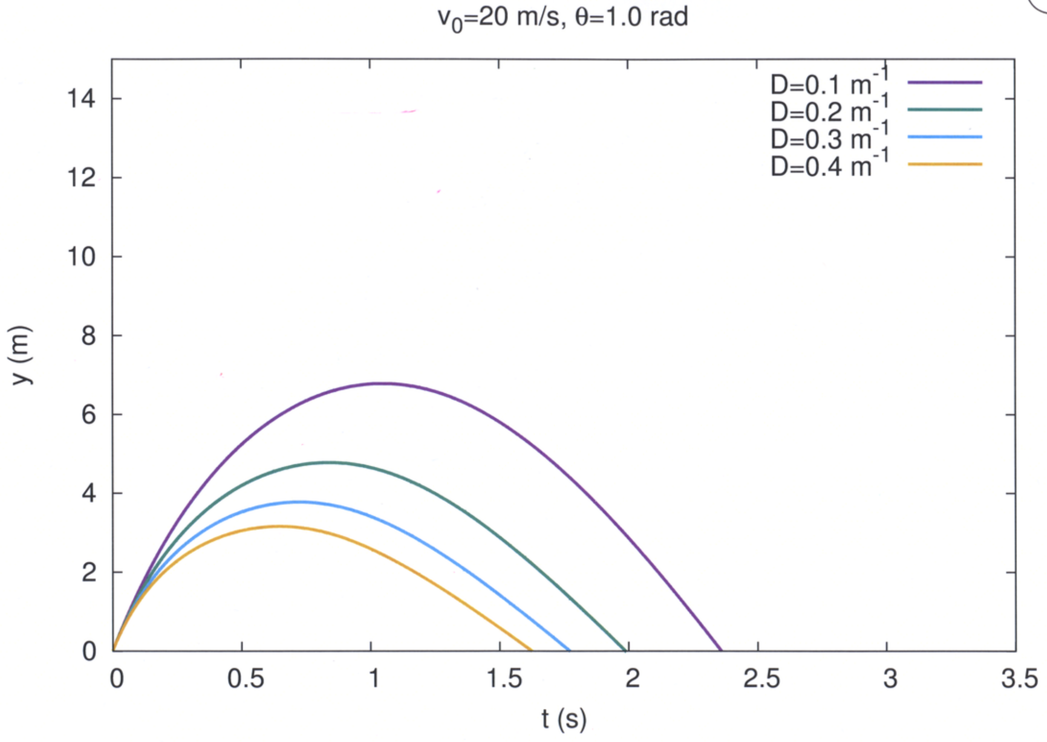
v0=20 m/s, θ=1.0 rad
k=0.1 s-1
k=0.2 s-1
k=0.3 s-1
k=0.4 s-1
y (m)
x (m)
0
2
4
6
8
10
12
14
0
5
10
15
20
25
30

$-mDv^2 \frac{\bar{v}}{v}$

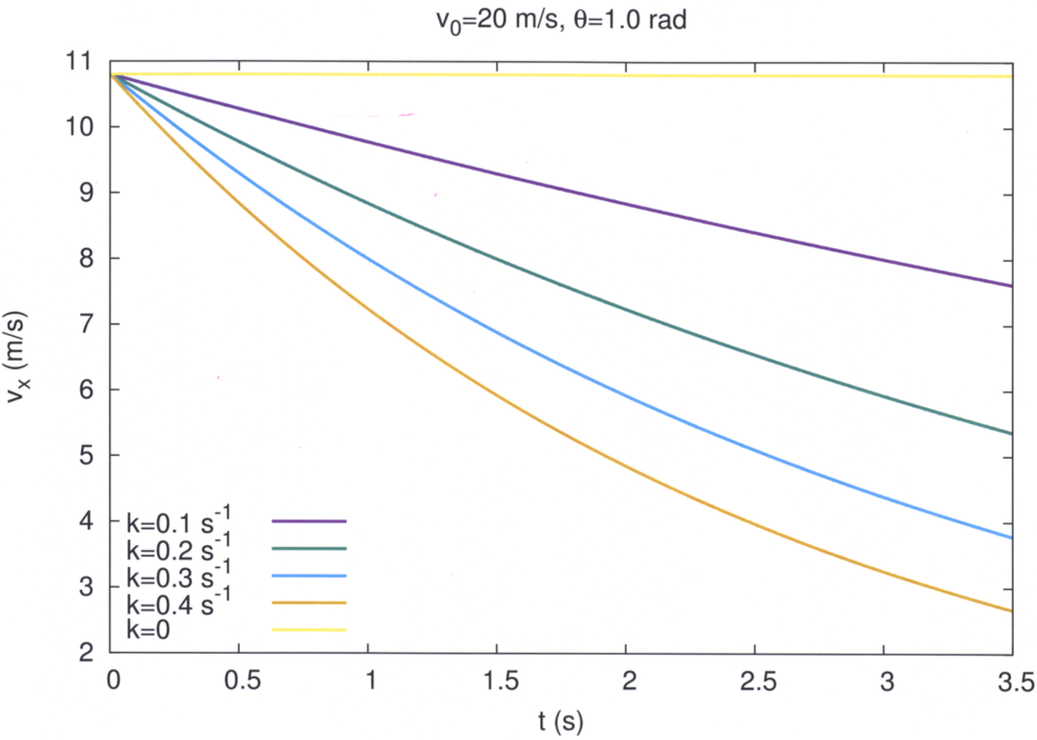
5

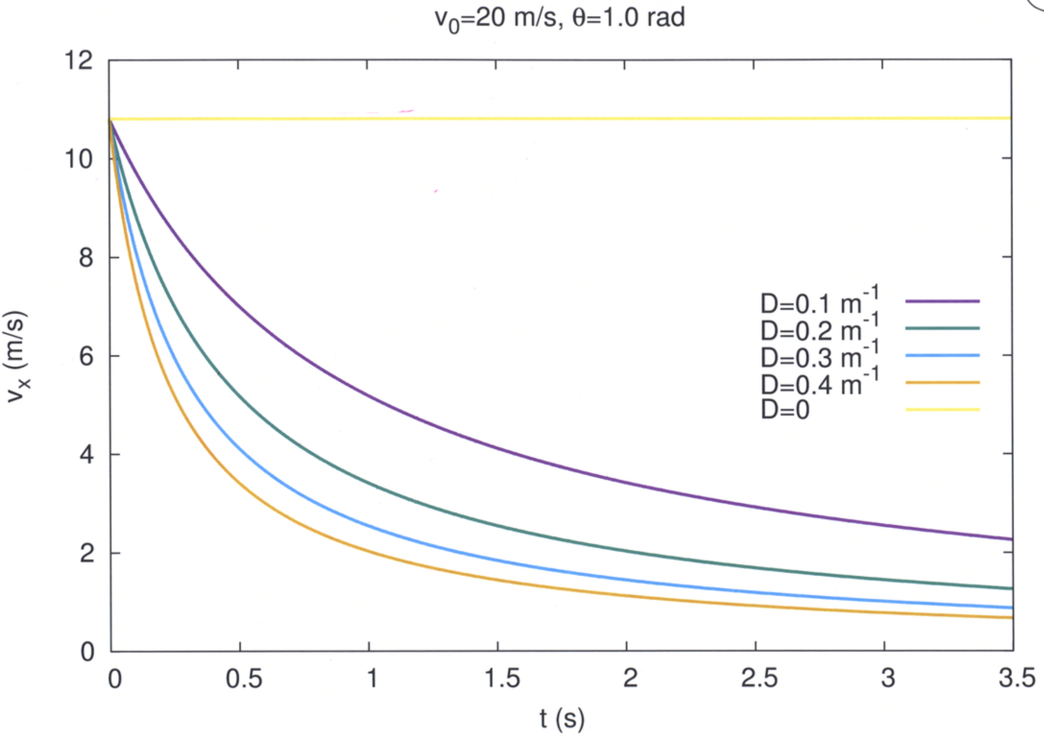


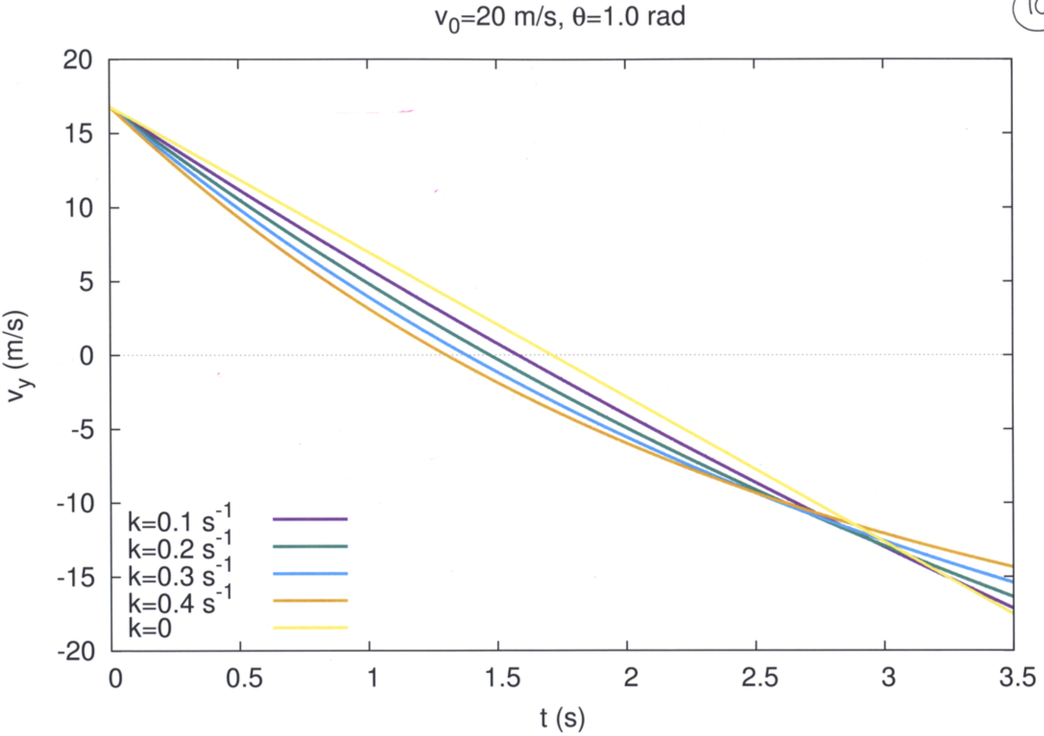

v0=20 m/s, θ=1.0 rad
k=0.1 s-1
k=0.2 s-1
k=0.3 s-1
k=0.4 s-1
y (m)
t (s)
0
2
4
6
8
10
12
14
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

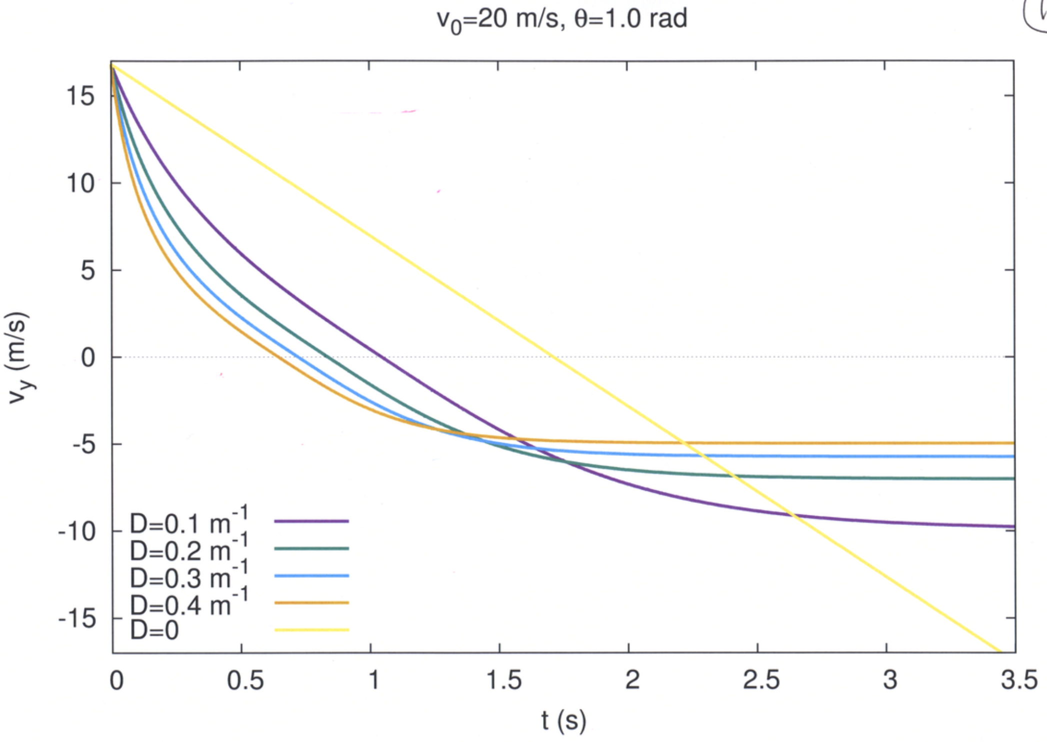


v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
D=0.1 m^{-1}
D=0.2 m^{-1}
D=0.3 m^{-1}
D=0.4 m^{-1}
y (m)
t (s)
0
2
4
6
8
10
12
14
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


v0=20 m/s, θ=1.0 rad
vx (m/s)
t (s)
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
k=0.1 s-1
k=0.2 s-1
k=0.3 s-1
k=0.4 s-1
k=0


v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
v_x (m/s)
t (s)
D=0.1 m^{-1}
D=0.2 m^{-1}
D=0.3 m^{-1}
D=0.4 m^{-1}
D=0


v0=20 m/s, θ=1.0 rad
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
vy (m/s)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
t (s)
k=0.1 s-1
k=0.2 s-1
k=0.3 s-1
k=0.4 s-1
k=0


v0=20 m/s, θ=1.0 rad
vy (m/s)
t (s)
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
D=0.1 m-1
D=0.2 m-1
D=0.3 m-1
D=0.4 m-1
D=0

Varðveislulögmál

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \bar{F} = 0 \rightarrow \dot{\bar{p}} = 0,$$

$\bar{p}$ varðveitt ef engin kraftar verka á ögnina

Hverfiþungi

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$$

miðað við punkt sem er upphaf $\bar{r}$

$$\bar{N} = \bar{r} \times \bar{F}$$

vægi krafts miðað við

$$\dot{\bar{L}} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = (\dot{\bar{r}} \times \bar{p}) + (\bar{r} \times \dot{\bar{p}})$$

$$= \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \dot{\bar{p}}$$

$$= (\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}})m + \bar{r} \times \dot{\bar{p}} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{N}$$

$\bar{L}$ er varðveitt ef ekkert vægi verkar á ögnina

Orka

Vinna $\bar{F}$ á ögn er skilgreind sem

$$W_{12} = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Ef $\bar{F}$ er heildarkrafturinn á ögnina

$$\rightarrow \bar{F} \cdot d\bar{r} = \left(m \frac{d\bar{v}}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} dt \right) = m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} dt$$

$$= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\bar{v} \cdot \bar{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$\rightarrow W_{12} = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] \Big|_1^2 = \frac{1}{2} m \left\{ v_2^2 - v_1^2 \right\} = T_2 - T_1$$

þar sem $T = \frac{1}{2} m v^2$ er hreyfiorka agnarinnar

$\boxed{\bar{F} \text{ verkar á ögnina og breytir hreyfiorku hennar}}$

Vinna $\bar{F}$ bætist við eða dregst frá hreyfiorku agnarinnar

Ef vinna $\bar{F}$ á ögnina er óháð leið þá kallast krafturinn geyminn (conservative) og

$$\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$$

{Athugið að heildið getur aldrei horfið fyrir viðnámskraft}

þá er til mættisfall $U(r)$ þ. a.

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} U(\bar{r})$$

opin eða lokuð kerfi

því $\bar{F} \cdot d\bar{r} = -dU$ er eina leiðin t.þ.a. W_{12} sé aðeins háð endapunktum leiðarinnar því fast fyrir geymin kerfi að

$$\left.\begin{aligned} W_{12} &= T_2 - T_1 \\ W_{12} &= U_1 - U_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

$$\rightarrow \quad E_2 = E_1$$

$\boxed{\text{Heildarorka geymins kerfis er föst}}$

U er óháð tíma.

$\boxed{\text{Skoðum aðeins hreyfingu í 1D}}$

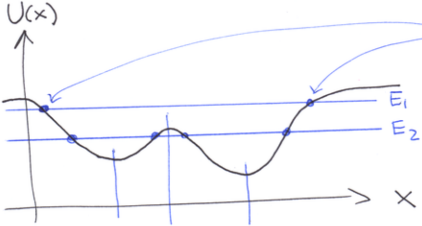
$$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - U(x)\right\}}$$

$$\rightarrow \quad dt = \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - U(x)\right\}}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{\pm dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - U(x)\right\}}}}$$

Formleg lausn fyrir öll geymin 1D-Kerfi



Viðsnúningspunktar

stöðugt jafnvægi

óstöðugt —||—

$$U(x) = U_0 + x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) + \cdots$$

Takmörk sígildrar aflfræði:

Sígild aflfræði $\longleftrightarrow$ Afstæðiskenning

Ekki gildir $\frac{v}{c} \ll 1$

$\updownarrow$

skammtafræði

smá kerfi ← óaðgreinanleiki
$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
} smásætt

Safn einda, óaðgreinanleiki
fylgni, samfösun
} stórsæ skammtakerfi