Aflfræði (EÐL302G) haustið 2020

Kennarar: Viðar Guðmundsson (prófessor í eðlisfræði; vidar@hi.is).

Kennslubók: Variational Principles in Classical Mechanics, eftir Douglas Cline, endurnýjuð 2. útgáfa, 2019. Bókin er til frjáls á vefnum: http://classicalmechanics.lib.rochester.edu/
Til hliðsjónar: Classical Dynamics of Particles and Systems eftir Thornton & Marion (5. útg. 2004).
Allar upplýsingar um námskeiðið munu birtast á vefsíðu:
https://notendur.hi.is/vidar/Nam/Afl/index.html

Gróf kennsluáætlun og lesefni:

Þáttur	Efni	Kaflar í bók Douglas Cline
1	Hreyfijöfnur	2.2, 2.12.1, 2.12.2, 2.12.5
2	Línulegar sveiflur	3.1 – 3.6, 3.9
3	Ólínulegar sveiflur og ringl	4.1 – 4.6
4	Þyngdarfræði, hnikun	2.14, 2.15, 5.1 – 5.12
5	Euler – Lagrange	6.1 – 6.14
6	Jöfnur Hamiltons	7.1, 7.2, 7.5 – 7.14, 8.1 – 8.5
7	Miðlæg mætti	11.1 –11.7, 11.8 – 11.8.3, 11.9.1, 11.10
8	Agnakerfi	2.8 – 2.10, 2.12.8
9	Hreyfing utan tregðukerfis	12.1 – 12.8, 12.10 – 12.14
10	Aflfræði stjarfhluta	13.1 – 13.12
11	Horn Eulers og hreyfijöfnur	13.13 – 13.23
12	Tengdar Sveiflur	14.1 – 14.9

Skipulag: 2+2 fyrirlestrar og dæmatími einu sinni í viku. Dæmi verða lögð fyrir á miðvikudögum fyrir kl. 17 á vefslóð námskeiðisins: https://notendur.hi.is/vidar/Nam/Afl/index.html

Um er að ræða tímadæmi þar sem nemendur eru hvattir til að reikna upp á töflu (engin skiladæmi). Hver nemandi velur sér dæmahóp sem ber ábyrgð á einu dæmi í hverjum dæmatíma.

Heimapróf: Verður haldið seint í október. Ekki er skylda að taka prófið; nemendur geta valið að gera það ekki og mun þá vægi jólaprófs í lokaeinkunn verða 100%. Á prófinu verða svipuð dæmi og í dæmatímum og á lokaprófi. Nemendur fá nægan próftíma og ætlast er til þess að þeir æfi góðan frágang og framsetningu á tveimur reiknuðum dæmum.
Vægi heimaprófs í lokaeinkunn er 20% til hækkunar.

Jólapróf: Skriflegt þriggja stunda próf. Prófið verður með svipuðu sniði og fyrri ár og allar bækur og nótur eru leyfileg prófgögn. Dæmin munu svipa til tímadæma yfir misserið.
Vægi jólaprófs í lokaeinkunn er 80-100%

Lögmál Newtons

I. Hraði hlutar breytist aðeins ef kraftur verkar á hann

II. $\bar{F} = \frac{dp}{dt}$

$\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$, $p = m\bar{v} = m\dot{\bar{r}}$

Tregðukerfi: í þeim gilda Lögmál Newtons

→ kerfi í jafnri hreyfingu
engin hröðun
$F = m\ddot{\bar{r}}$ eins í þeim öllum

III.

$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

Gildir aðeins um miðlæga krafta (Central forces) ← óháðir hraða, og verka eftir tengilínu hlutanna

↑ {þess vegna gekk mönnum illa að átta sig á rafsegulfræði}

Hreyfijöfnur

Skoðum hreyfingu agnar í loft og notum einfallt líkan fyrir loftviðnám

$$\bar{F} = m\bar{g} - mkv^n \frac{\bar{v}}{v}$$

$n = 1$ eða 2

m til þægindar, breytir aðeins skilgreiningu á k

stefna viðnámskrafts móti hraða

Einvíð hreyfing í efni með $n=1$

$$ma = m\dot{v} = -kmv$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt'$$

$$\ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -kt$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = v_0 \exp\{-kt\}}$$

Innskot um vídd

Allar eðlisfræðilegar stærðir má tákna við lengd L, massa M og tíma T

$\{\text{vídd } t\} = [t] = T$

Aðeins er hægt að taka exp af hreinni tölu

$\rightarrow [kt] = 1$

því er $\{\text{vídd } k\} = \frac{1}{T}$

eða $[k] = \frac{1}{T}$

Hvað með ln?

$$\boxed{v(t \to \infty) = 0}$$

Hversu langt kemst ögnin?

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \quad dx = v\,dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx' = \int_0^t dt' \, v(t') \qquad \text{ef } x(0) = 0$$

$$= v_0 \int_0^t dt' \exp\{-kt'\}$$

$$x(t) = -\frac{v_0}{k}\left\{e^{-kt} - 1\right\}$$

eða

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{k}\left[1 - e^{-kt}\right]}$$

sjá:

$$\left[\frac{v_0}{k}\right] = \frac{L}{T}T = L$$

og

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t\to\infty) = \dfrac{v_0}{k} \\ \text{ef } k > 0 \end{array}}$$

Við getum tengt x og v

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{v}$$

$$\to v\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\to \frac{dv}{dx} = -k$$

$$dv = -k\,dx$$

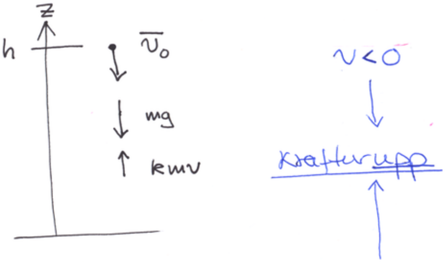
$$\int_{v_0}^{v} dv' = -k\int_0^x dx'$$

$$\to v - v_0 = -kx$$

$$\boxed{v = v_0 - kx}$$

$$\left\{[kx] = \frac{L}{T}\right\}$$

Lóðrétt fall í lofti



$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv$$

$$\frac{dv}{kv+g} = -dt$$

setjum $v_0 < 0$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{kv'+g} = -\int_0^t dt'$$

$$\frac{1}{k}\ln\left[kv'+g\right]\Big|_{v_0}^{v(t)} = -t$$

$$\ln\left[\frac{kv(t)+g}{kv_0+g}\right] = -kt$$

$$kv(t)+g = \left[kv_0+g\right]e^{-kt}$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{g}{k} + \frac{\left[kv_0+g\right]}{k}e^{-kt}}$$

$$\boxed{v(t \to \infty) = -\frac{g}{k}}$$ markhraði

$$\left[\frac{g}{k}\right] = \frac{L}{T^2}T = \frac{L}{T}$$

Kasthreyfing, 2D

Fyrst án loftmótstöðu

$$\bar{F} = m\bar{g}$$

x-átt: $0 = m\ddot{x}$

y-átt: $-mg = m\ddot{y}$

Setjum upphaf

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$

upphafsferð: $|\bar{v}(0)| = v_0$

$$\ddot{x} = 0$$
$$\dot{x} = v_0 \cos\theta$$
$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$\ddot{y} = -g$$
$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\theta$$
$$\underbrace{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta}_{\text{tímaheildun + upphafsk.}}$$

Seilni (range) má finna frá

tímanum T sem gefur $y(T)=0$

$$y(T) = T\left\{-g\frac{T}{2} + v_0 \sin\theta\right\} = 0$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$$ flugtími

$$R = x(T) = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

Með loftviðnámi

upphaf $\quad x(0)=0, \; y(0)=0$

$$\dot{x}(0) = v_0\cos\theta = U$$

$$\dot{y}(0) = v_0\sin\theta = V$$

hreyfijöfnur

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg \end{aligned}}$$

sömu tegundar og í dæminu á undan

[Í tíma eru x- og y-hreyfingar óháðar]

því fæst

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{U}{k}\left\{1 - e^{-kt}\right\} \\ y(t) &= -\frac{gt}{k} + \frac{(kV+g)}{k^2}\left\{1 - e^{-kt}\right\} \end{aligned}}$$

Hér er ekki einfalt að finna jöfnu fyrir y(x), en einfalt að teikna y sem fall af x með því að reikna punkta fyrir mism t

Skoðum graf aðeins seinna

flugtími → Seilni

$$Y(T) = -\frac{gT}{k} + \frac{(kV+g)}{k^2}\left\{1-e^{-kT}\right\} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{(kV+g)}{gk}\left\{1-e^{-kT}\right\}}$$

óbein jafna fyrir T

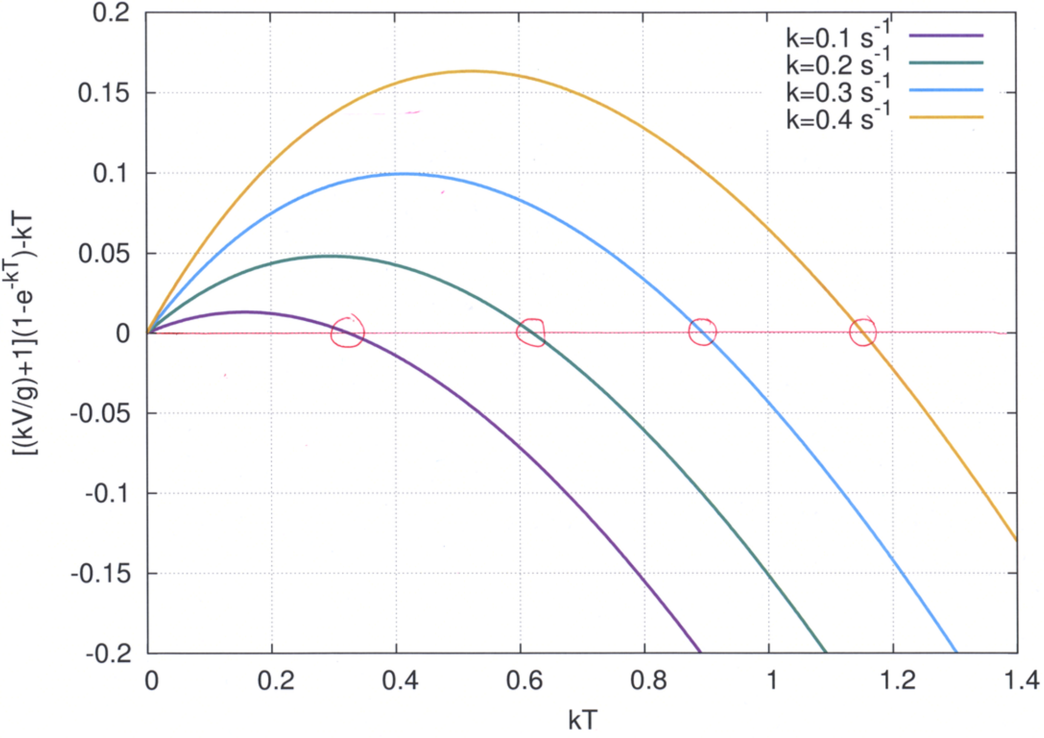
T má finna með rótarleit á

$$\boxed{\left\{\frac{kV+g}{g}\right\}\left\{1-e^{-kT}\right\} - kT = 0}$$

Breytan er kT (víddarlaus)

k kemur fyrir sem frjáls stiki

Sjá mynd á næstu síðu :


k=0.1 s^{-1}
k=0.2 s^{-1}
k=0.3 s^{-1}
k=0.4 s^{-1}
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
[(kV/g)+1](1-e^{-kT})-kT
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
kT

Skoðum truflanareikning og tökum lága að ferð

Truflun

$$[kT] = 1$$

víddarlaus stiki

T verður endanlegt -> til eru gildi á k

þ.a. $kT \ll 1$

þá má nota kT sem truflunarstika

Athugið að stærð með vídd getur aðeins verið smá í samanburði við aðra með sömu vídd

setjum $kT \ll 1$

$$kT = \frac{kV+g}{g}\left[1 - e^{-kT}\right]$$

$$kT \simeq \frac{kV+g}{g}\left[kT - \frac{1}{2}(kT)^2 + \frac{1}{6}(kT)^3 + \cdots\right]$$

$$1 \simeq \frac{kV+g}{g}\left[1 - \frac{1}{2}kT + \frac{1}{6}(kT)^2\right]$$

$$-\frac{kV}{g} = \frac{kV+g}{g}\, kT\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}kT\right]$$

$$-\frac{kV}{kV+g} = kT\,\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}kT - 1\right\}$$

$$\rightarrow\; kT = \frac{2kV}{kV+g}\,\frac{1}{1-\frac{kT}{3}} \simeq \frac{2kV}{kV+g}\left[1+\frac{kT}{3}+\frac{(kT)^2}{9}+\cdots\right]$$

$$kT\left\{1-\frac{2kV}{3(kV+g)}\right\} = \frac{2kV}{kV+g}\left[1+\frac{(kT)^2}{9}\right]$$

$$kT\left\{kV+3g\right\} = 6kV\left\{1+\frac{(kT)^2}{9}\right\}$$

$$kT = \frac{6kV}{kV+3g}\left\{1+\frac{(kT)^2}{9}\right\}$$

nālgun hogra mogin $\quad T \approx T_0 = \frac{2V_0}{g}\sin\theta = \frac{2V}{g}$

$$\boxed{kT = \frac{6kV}{kV+3g}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{kV}{g}\right)}{1+\frac{1}{3}\frac{kV}{g}}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}$$

$$\approx 2\left(\frac{kV}{g}\right)\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)\right\}\left\{1+\frac{4}{9}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}$$

$$\simeq 2\left(\frac{kV}{g}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)^2 = \boxed{2\left(\frac{kV}{g}\right)\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)^2\right\}}$$

Sidan er

$$x = \frac{U}{k}\left\{1-e^{-kt}\right\} \rightarrow x(T) = R = \frac{U}{k}\left\{1-e^{-kT}\right\}$$

Liðum

$$R = \frac{U}{k}\left\{kT - \frac{1}{2}(kT)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

setjum inn kT og fáum

án mótstöðu
$R_0 = 2\frac{UV}{g}$

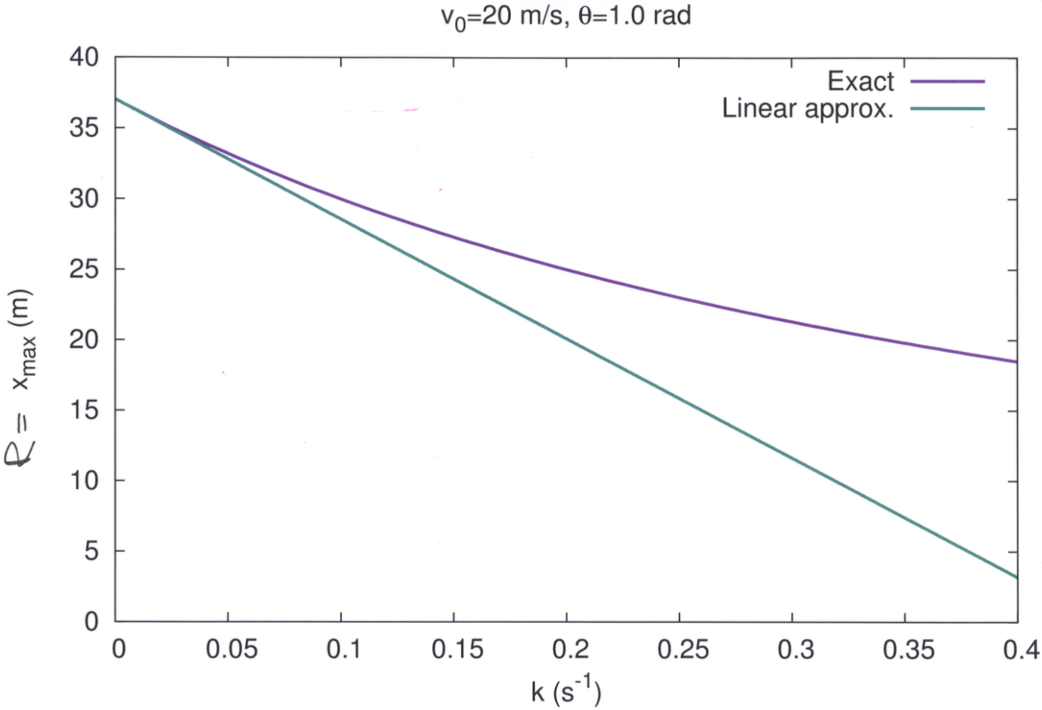
$$R \simeq 2\left(\frac{UV}{g}\right)\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{kV}{g}\right\} = R_0\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{kV}{g}\right)\right]$$

Nálgun á seilni fyrir ögn í „lofti", línuleg í k

Berum saman á mynd við nákvæma lausn

Skoðum síðar hvernig nákvæm lausn er fundin

16



v_0=20 m/s, θ=1.0 rad
Exact
Linear approx.
R = x_{max} (m)
k (s^{-1})
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4